

# 非均匀网格泊松方程高阶紧致离散及加速方法

李兆辉 封永亮 陶文铨

(西安交通大学热流科学与工程教育部重点实验室, 西安 710049)

**摘要** 本文将非均匀网格直接离散的高阶紧致格式从二维推广到三维, 结合附加修正多重网格方法提高了传统迭代方法的收敛效率, 并且验证了该格式在不同边界条件的数值表现。结果表明: 该方法可以有效的求解 NS 方程中的压力泊松方程。

**关键词** 高阶紧致格式; 附近修正多重网格方法; 压力泊松方程

**中图分类号:** O357.5+2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-231X(2014)06-1194-06

## High Order Compact Difference Approximation and Acceleration Method for Poisson Equation on Non-Uniform Grids

LI Zhao-Hui FENG Yong-Liang TAO Wen-Quan

(Key Laboratory of Thermal Fluid Science and Engineering of MOE, School of Energy & Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract** In this paper the high order compact scheme on non-uniform grids is extended from 2D to 3D, and the additive-correction multigrid technique is adopted to accelerate convergence rate. Numerical performance of the adopted method is validated for different boundary conditions. The results show that: this method can be effectively used to solve pressure Poisson equation of the NS equation.

**Key words** high order compact scheme; multigrid method based on additive-correction; pressure Poisson equation(PPE)

## 0 引言

不可压缩 NS 方程求解中常常需要求解压力泊松方程<sup>[1]</sup>。过去二十年中, 出现了大量求解压力泊松方程的方法<sup>[2]</sup>。特别是在湍流的直接模拟和大涡模拟中需要求解高阶离散精度的压力泊松方程, 近年来提出的高阶紧致格式 (High-order compact, HOC) 结合多重网格方法受到人们关注。例如, Gupta<sup>[3]</sup> 采用 HOC 及 V 循环的多重网格算法求解了二维压力方程, 对比五点二阶中心差分, 计算结果表明, 无论在数值精度还是在计算效率上都有了非常大的提高。很多文献研究了均匀网格下的 HOC 格式实施, 然而考虑精度及节省资源, 通常需要在梯度大的区域布置较密的网格, 平缓的区域布置较粗的网格。非均匀网格下的 HOC 格式的实施有两种方法: 一种是将物理平面的非均匀网格映射到计算平面的均匀网格, 方程离散与求解均在计算平面进行; 另一种方法是直接在非均匀的物理平面上构造高阶格式并求解。前一种方法中计算平面的方程会比物理平面的方程复杂, 甚至可能出现交叉导数, 增加了计算量,

同时网格变换时还有可能产生数值误差。因此, 本文将文献 [4] 中的非均匀网格上直接构造的二维高阶紧致格式推广到三维, 并采用了基于附加修正的 V 循环多重网格算法加速迭代收敛<sup>[5]</sup>。

该格式可以在任意坐标方向上的非均匀网格上实施, 依赖于网格的间距, 计算精度至少三阶或四阶。并且可处理第一类边界、齐次边界以及周期性边界多种边界条件, 可应用于 NS 方程的求解过程中。基于附近修正的多重网格方法, 系数自然生成, 不需要特别的构造限定及延拓算子, 因而实施简单, 并且经计算验证可加快高阶紧致格式的离散方程的收敛速度。

## 1 高阶紧致格式

三维压力泊松方程的一般形式为:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = s(x, y, z) \quad (1)$$

收稿日期: 2014-01-13; 修订日期: 2014-05-25

基金项目: 国家自然科学基金 (No.51136004); 国家重点基础研究 (973) 项目 (No.G2011CB707203)

作者简介: 李兆辉 (1984-), 男, 博士生, 主要从事湍流流动的计算。通信作者: 陶文铨, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士, wqtao@mail.xjtu.edu.cn

其中  $(x, y, z) \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ , 源项  $s(x, y, z)$  及求解变量  $\varphi(x, y, z)$  假设是求解区域上变量  $x, y, z$  的光滑可导函数。

将求解区域  $[a_1, a_2]$  分为  $a_1 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n_x}, x_{n_x+1} = a_2$ ,  $x_i (0 \leq i \leq n_x + 1)$  可以是非等距排列。求解区域  $[b_1, b_2], [c_1, c_2]$  类似可剖分为  $b_1 = y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n_y}, y_{n_y+1} = b_2$ ,  $c_1 = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n_z}, z_{n_z+1} = c_2$ 。  $x$  方向向前差分步长定义为:  $x_f = x_{i+1} - x_i$ , 向后差分步长:  $x_b = x_i - x_{i-1}$ ,  $(1 \leq i \leq n_x)$ 。类似地,  $y$  方向定义:  $y_f = y_{j+1} - y_j, y_b = y_j - y_{j-1}$ ,  $(1 \leq j \leq n_y)$ ,  $z$  方向定义:  $z_f = z_{k+1} - z_k, z_b = z_k - z_{k-1}$   $(1 \leq k \leq n_z)$ 。见图 1。

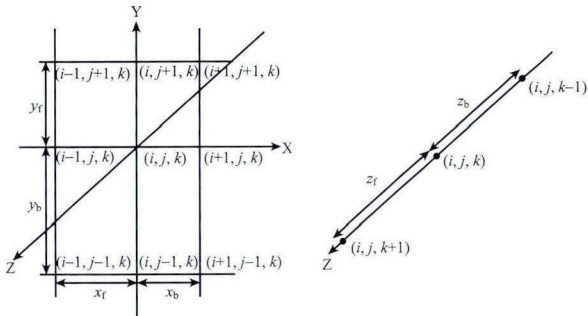


图 1 非均匀网格紧致格式图案

Fig. 1 Non-uniform grid compact scheme stencil

以  $x$  方向为例来说明离散方法。假设  $\varphi(x, y, z)$  在求解区域内光滑可导, 在两点  $(i-1, y, z)$ ,  $(i+1, y, z)$  分别进行泰勒展开:

$$\varphi_{i-1,j,k} = \varphi_{i,j,k} - x_b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j,k} + \frac{x_b^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} - \frac{x_b^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j,k} + \frac{x_b^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j,k} - \frac{x_b^5}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} \Big|_{i,j,k} + O(x_b^6) \quad (2)$$

$$\varphi_{i+1,j,k} = \varphi_{i,j,k} + x_b \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j,k} + \frac{x_b^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} + \frac{x_b^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j,k} + \frac{x_b^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j,k} + \frac{x_b^5}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} \Big|_{i,j,k} + O(x_b^6) \quad (3)$$

两式相减 (2) 式减去 (3) 式可得:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i-1,j,k}}{x_b + x_f} - \frac{1}{2} (x_f - x_b) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} - \frac{1}{6} (x_b^2 + x_f^2 - x_b x_f) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j,k} - \frac{1}{4!} (x_f - x_b) (x_b^2 + x_f^2) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j,k} +$$

$$O\left(\frac{x_f^5 + x_b^5}{x_f + x_b}\right) + O\left(\frac{x_f^5 + x_b^5}{x_f + x_b}\right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} = \frac{2}{x_b + x_f} \left[ \frac{\varphi_{i-1,j,k}}{x_b} + \frac{\varphi_{i+1,j,k}}{x_f} - \left(\frac{1}{x_b} + \frac{1}{x_f}\right) \varphi_{i,j,k} \right] - \frac{1}{3} (x_f - x_b) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j,k} - \frac{1}{12} (x_b^2 + x_f^2 - x_b x_f) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j,k} - \frac{1}{60} (x_f - x_b) (x_b^2 + x_f^2) \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} \Big|_{i,j,k} + O\left(\frac{x_f^5 + x_b^5}{x_f + x_b}\right) \quad (5)$$

一阶、二阶中心差分算子分别定义为:

$$\delta_x \varphi_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i-1,j,k}}{x_b + x_f},$$

$$\delta_x^2 \varphi_{i,j,k} = \frac{2}{x_b + x_f}$$

$$\left[ \frac{1}{x_b} \varphi_{i-1,j,k} + \frac{1}{x_f} \varphi_{i+1,j,k} - \left(\frac{1}{x_b} + \frac{1}{x_f}\right) \varphi_{i,j,k} \right] \quad (6)$$

引入式 (6) 的符号, 式 (5) 可写为:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j,k} = \delta_x^2 \varphi_{i,j,k} - \frac{1}{3} (x_f - x_b) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j,k} - \frac{1}{12} (x_b^2 + x_f^2 - x_b x_f) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j,k} -$$

$$\frac{1}{60} (x_f - x_b) (x_b^2 + x_f^2) \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} \Big|_{i,j,k} + O\left(\frac{x_f^5 + x_b^5}{x_f + x_b}\right) \quad (7)$$

由式 (6)、式 (7), 式 (4) 可写为:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j,k} = \delta_x \varphi_{i,j,k} - \frac{1}{2} (x_f - x_b) \delta_x^2 \varphi_{i,j,k} - \frac{1}{6} x_b x_f \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j,k} - \frac{1}{24} x_b x_f (x_f - x_b) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j,k} + O\left(\frac{x_f^5 + x_b^5}{x_f + x_b}\right) \quad (8)$$

$y, z$  方向可以得到类似的表达式。

利用式 (7), 方程 (1) 在点  $(i, j, k)$  可近似为:

$$[\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2] \varphi_{i,j,k} + \tau_{i,j,k} = s_{i,j,k} \quad (9)$$

其中截断误差  $\tau_{i,j,k}$  定义如下:

$$\tau_{i,j,k} = - \left( H_1 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + H_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + H_3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} + K_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + K_2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + K_3 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} \right) \Big|_{i,j,k} -$$

$$[(x_f - x_b)(x_b^2 + x_f^2)\varphi_1 + (y_f - y_b)(y_b^2 + y_f^2)\varphi_2 + (z_f - z_b)(z_b^2 + z_f^2)\varphi_3] + O\left(\frac{x_b^5 + x_f^5}{x_b + x_f}\right) + O\left(\frac{y_b^5 + y_f^5}{y_b + y_f}\right) + O\left(\frac{z_b^5 + z_f^5}{z_b + z_f}\right) \quad (10)$$

若  $\tau_{i,j,k} = 0$ , 则式 (9) 名义离散精度为二阶 (当网格非均匀时低于 2 阶)。  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  和  $\varphi_3$  为高阶截断误差, 并且:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{3}(x_f - x_b), \\ H_2 &= \frac{1}{3}(y_f - y_b), \\ H_3 &= \frac{1}{3}(z_f - z_b) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{12}(x_b^2 + x_f^2 - x_b x_f), \\ K_2 &= \frac{1}{12}(y_b^2 + y_f^2 - y_b y_f), \\ K_3 &= \frac{1}{12}(z_b^2 + z_f^2 - z_b z_f) \end{aligned} \quad (12)$$

采用原方程 (1) 消除  $\tau_{i,j,k}$  中三阶、四阶导数, 忽略四阶以上的项, 得到了非均匀网格上高阶紧致格式:

$$\begin{aligned} &[(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) + H_1\delta_x(\delta_y^2 + \delta_z^2) + H_2\delta_y(\delta_x^2 + \delta_z^2) + H_3\delta_z(\delta_x^2 + \delta_y^2) + (K_1 + K_2)\delta_x^2\delta_y^2 + (K_1 + K_3)\delta_x^2\delta_z^2 + (K_3 + K_2)\delta_z^2\delta_y^2]\varphi_{i,j,k} = \\ &[1 + H_1\delta_x + H_2\delta_y + H_3\delta_z + (K_1 - 1.5H_1^2)\delta_x^2 + (K_2 - 1.5H_2^2)\delta_y^2 + (K_3 - 1.5H_3^2)\delta_z^2]s_{i,j,k} \end{aligned} \quad (13)$$

从  $\tau_{i,j,k}$  的表达式可以看出, 格式 (13) 的局部离散精度取决于网格间距。当网格间距均匀时 ( $x_b = x_f, y_b = y_f, z_b = z_f$ ) 格式 (13) 精度为四阶; 当网格非均匀时, 格式 (13) 的精度至少为三阶。

为方便起见, 将一阶中心差分、二阶中心差分算子记为:

$$\delta_x\varphi_{i,j,k} = L_x\varphi_{i-1,j,k} + R_x\varphi_{i+1,j,k},$$

$$\delta_x^2\varphi_{i,j,k} = A_x\varphi_{i-1,j,k} + B_x\varphi_{i,j,k} + C_x\varphi_{i+1,j,k} \quad (14)$$

其中,  $L_x = -\frac{1}{x_b + x_f}$ ,  $R_x = \frac{1}{x_b + x_f}$ ,  $A_x = \frac{2}{(x_b + x_f)x_b}$ ,  $B_x = -\frac{2}{x_b x_f}$ ,  $C_x = \frac{2}{(x_b + x_f)x_f}$ ,  $y$

方向和  $z$  方向类似。于是, 由式 (13) 可得显式表达的十九点高阶紧致格式, 可写为式 (15) 的形式:

$$\sum_{nb=1\sim 18} a_{nb}\varphi_{nb} - a_p\varphi_{i,j,k} = r h s_{i,j,k} \quad (15)$$

其中邻点系数  $a_{nb}$ , 主对角元系数  $a_p$  及源项  $r h s_{i,j,k}$  的计算式见附录 A。

## 2 多重网格加速方法

多重网格方法求解代数方程时, 由于各种频率分量的误差可以得到比较均匀的衰减, 因而它是促进代数方程收敛速度的一种有效方法 [1]。本文中  $x$  方向在细网格上直接求解,  $y$ 、 $z$  方向采用附加修正的多重网格加速技术, 采用 V 循环算法, 光顺次数通过残差余量收敛率决定 [5]。

图 2 为相邻两个层次的多重网格, 求解变量位于单元的中心。粗网格节点  $(i, j, k)$  周围四个细网格节点  $(i, 2j - 1, 2k - 1)$ 、 $(i, 2j - 1, 2k)$ 、 $(i, 2j, 2k - 1)$ 、 $(i, 2j, 2k)$  形成一个块。

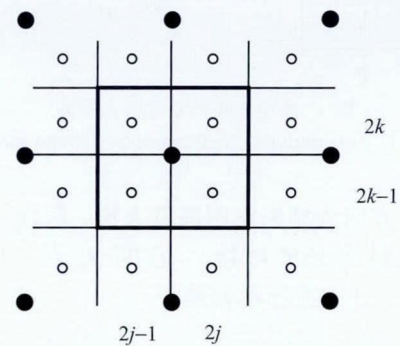


图 2 粗网格  $(i, j, k)$  所在的块由四个细网格  $(i, 2j - 1, 2k - 1)$ 、 $(i, 2j - 1, 2k)$ 、 $(i, 2j, 2k - 1)$ 、 $(i, 2j, 2k)$  组成  
Fig. 2 Coarse grid  $(i, j, k)$  block is composed of four fine grid  $(i, 2j - 1, 2k - 1)$ 、 $(i, 2j - 1, 2k)$ 、 $(i, 2j, 2k - 1)$ 、 $(i, 2j, 2k)$

粗细网格上的变量分别用上标  $c$ 、 $f$  表示。  $(\varphi_{i,j,k}^f)'$  记为当前迭代的解, 细网格上迭代求解余量记为  $r_{i,j,k}^f$ , 由方程 (15) 可得:

$$\sum_{nb=1\sim 18} a_{nb}^f (\varphi_{nb}^f)' - a_p^f (\varphi_{i,j,k}^f)' = r h s_{i,j,k}^f + r_{i,j,k}^f \quad (16)$$

位于同一个块的四个细网格节点共用同一个修正  $\varphi_{i,j,k}^c$ :

$$\begin{aligned} &(\varphi^f)_{(i,2j-1,2k-1),(i,2j-1,2k),(i,2j,2k-1),(i,2j,2k)} = \\ &(\varphi^f)'_{(i,2j-1,2k-1),(i,2j-1,2k),(i,2j,2k-1),(i,2j,2k)} + \varphi_{i,j,k}^c \end{aligned} \quad (17)$$

修正的原则是同一个块内的四个细网格上的余量之和为零, 即:

$$\sum_{\text{块}} \left( \sum_{nb=1\sim 18} a_{nb}^f \left( (\varphi_{nb}^f)' + \varphi_{nb}^c \right) - a_p^f \left( (\varphi^f)' + \varphi_{(i,j,k)}^c \right) - rhs^f \right) = 0 \quad (18)$$

于是即可得到粗网格上的修正方程:

$$\sum_{nb=1\sim 18} a_{nb}^c \varphi_{nb}^c - a_p^c \varphi_{i,j,k}^c = rhs_{i,j,k}^c \quad (19)$$

不难看出, 该方法不需要特别的构造限定及延拓算子, 文献 [5] 给出了七点中心差分格式的结果。本文给出前面提出的十九点紧致格式的粗网格的离散系数以及源项如下:

$$\begin{aligned} (a_1^c)_{i,j,k} &= (a_1^f)_{i,2j-1,2k-1}, \\ (a_2^c)_{i,j,k} &= (a_2^f)_{i,2j-1,2k-1} + (a_2^f)_{i,2j,2k-1}, \\ (a_3^c)_{i,j,k} &= (a_1^f)_{i,2j,2k-1} + (a_3^f)_{i,2j-1,2k-1} + \\ & (a_3^f)_{i,2j,2k-1} + (a_5^f)_{i,2j-1,2k-1}, \dots, \\ (a_p^c)_{i,j,k} &= \sum_{\text{块}} a_p^f - \\ & \left[ (a_{12}^f, a_{16}^f, a_{18}^f)_{i,2j-1,2k-1} + (a_3^f, a_5^f, a_{12}^f)_{i,2j-1,2k} \right. \\ & \left. + (a_7^f, a_{14}^f, a_{16}^f)_{i,2j,2k-1} + (a_1^f, a_3^f, a_7^f)_{i,2j,2k} \right], \\ rhs_{i,j,k}^c &= - \sum_{\text{块}} r = \\ & - (r_{i,2j-1,2k-1} + r_{i,2j-1,2k} + r_{i,2j,2k-1} + r_{i,2j,2k}). \end{aligned}$$

### 3 数值验证

不可压缩流动中, 压力泊松方程通常碰到三种边界条件: 第一类边界 ( $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ )、齐次边界 ( $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ ) 与周期性边界。为了验证非均匀网格下的紧致格式以及在不同的边界条件下的性能, 考虑三维泊松方程:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = s(x, y, z), \quad (x, y, z) \in [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2] \quad (20)$$

当边界条件为第一类边界、源项为:  $s(x, y, z) = -3\pi^2 \sin(\pi x^2) \sin(\pi y^2) \sin(\pi z^2)$  时, 该方程的精

解为:  $\varphi(x, y, z) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$ ; 当边界条件为齐次边界或周期性边界、源项为:  $s(x, y, z) = -3\pi^2 \cos(\pi x^2) \cos(\pi y^2) \cos(\pi z^2)$ , 该方程的精确解为:  $\varphi(x, y, z) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z)$  [2]。网格划分为:  $x_i = 2 \times \left[ \frac{i}{n_x} + \frac{\lambda_x}{n_x} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i}{n_x}\right) \right], 0 \leq i \leq n_x, y, z$  方向类似。参数  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  用于调节网格节点空间分布的均匀程度,  $-1 \leq \lambda \leq 1, \lambda = 0$  时网格节点均匀分布,  $\lambda$  绝对值越大, 边界处节点分布越密集, 如图 3 示例。假定三个方向网格节点数一致:  $n_x = n_y = n_z = N$ , 则最大残差  $E$  定义为:  $E = \max_{1 \leq i,j,k \leq N} |\varphi_{num} - \varphi_{ana}|$ , 数值计算结果的实际精度, 又称收敛阶 (Convergence rate) 可定义为 [6]:  $M = \frac{\log(E_{N/2}/E_N)}{\log(2)}$ 。图 4 比较了多重网格逐次超松弛迭代方法和简单逐次超松弛迭代方法的计算迭代次数, 达到同样的残差, SOR 方法需要 31.2 s, 迭代次数 2154 次, 而采用本文的方法只用了 4.9 s, 仅 24 次迭代次数, 可以看出基于附加修正的多重网格方法可以大大加快传统迭代方法的收敛速率。

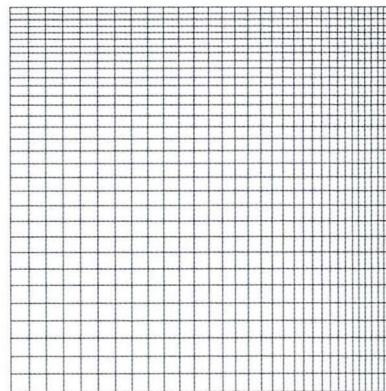


图 3 网格数  $N=32, \lambda = 0.5$  时的一个平面网格分布示意图  
Fig. 3 Schematic of a plane grid distribution when  $N=32, \lambda = 0.5$

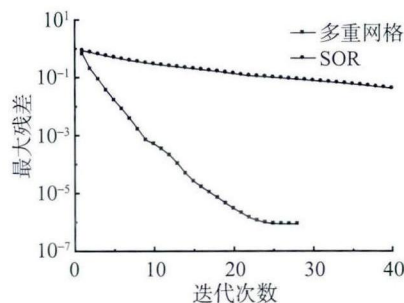


图 4 网格数  $N=64$ , 边界条件为第一类时迭代次数  
Fig. 4 Iteration number at the first boundary condition when  $N=64$

表 1 第一类边界条件时最大残差、收敛阶比较

Table 1 Maximum residual and convergence rate comparison at the first boundary condition

网格数 ( $N$ )	均匀网格 ( $\lambda = 0$ )		非均匀网格 ( $\lambda = 0.5$ )	
	最大残差 ( $E$ )	收敛阶 ( $M$ )	最大残差 ( $E$ )	收敛阶 ( $M$ )
32	$1.31 \times 10^{-5}$		$5.30 \times 10^{-5}$	
64	$8.59 \times 10^{-7}$	3.93	$3.59 \times 10^{-6}$	3.88
128	$5.50 \times 10^{-8}$	3.97	$2.29 \times 10^{-7}$	3.97

表 2 第二类边界及周期性边界条件时最大残差、收敛阶比较

Table 2 Maximum residual and convergence rate comparison at the second and periodic boundary conditions

网格数 ( $N$ )	均匀网格 ( $\lambda = 0$ )		非均匀网格 ( $\lambda = 0.5$ )	
	最大残差 ( $E$ )	收敛阶 ( $M$ )	最大残差 ( $E$ )	收敛阶 ( $M$ )
32	$1.43 \times 10^{-5}$		$3.74 \times 10^{-5}$	
64	$9.01 \times 10^{-7}$	3.99	$2.40 \times 10^{-6}$	3.96
128	$5.64 \times 10^{-8}$	4.00	$1.67 \times 10^{-7}$	3.84

第一类边界条件时计算结果见表 1。由表 1 可得, 均匀网格上紧致格式可达四阶精度, 非均匀网格 ( $\lambda = 0.5$ ) 时精度 (3.88) 略低于四阶。

当  $\varphi(x, y, z) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z)$ ,  $(x, y, z) \in [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$  时, 边界条件分别采用齐次边界及周期性边界得出了类似的数值结果, 见表 2。由表 2 同样得到, 紧致格式具有至少三阶或四阶的空间离散精度。

## 4 结 论

本文采用具有分析解的算例验证了三维泊松方程在非均匀网格上十九点紧致格式的收敛精度及附加修正多重网格方法的收敛效率, 并且验证了该格式在不同边界条件的收敛阶表现, 得出以下结论:

1) 三维坐标下非均匀网格的十九点紧致格式在均匀网格上离散精度为四阶, 非均匀网格离散精度至少三阶, 可以适应第一类边界、第二类边界及周期性边界多种边界条件。

2) 附加修正的多重网格方法可以应用到该紧致格式上, 并且能很大程度的提高传统迭代方法的收

敛效率。

## 参 考 文 献

- [1] 陶文铨. 数值传热学 [M]. 第二版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001  
TAO Wen-Quan. Numerical Heat Transfer [M]. 2nd ed. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001
- [2] Zhang J. Multigrid Method And Fourth-Order Scheme for 2D Poisson Equation with Unequal Mesh-Size Discretization [J]. J Comput Phys, 2002, 179: 170-179
- [3] Gupta M.M, Kouatchou J, Zhang J. Comparison of Second-Order and Fourth-Order Discretization for Multigrid Poisson Solvers [J]. J Comput Phys, 1997, 132: 226-232
- [4] Kalita J.C, Dass A.K, Dalal D.C. A Transformation-free HOC Scheme for Steady Convection-Diffusion on Non-Uniform Grids [J]. Int J Numer Meth Fluids, 2004, 44: 33-53
- [5] Xu H Y, Yuan W X, Khalid M. Design of a High-Performance Unsteady Navier-Stokes Solver Using a Flexible-Cycle Additive-Correction Multigrid Technique [J]. J Comput Phys, 2005, 209: 504-540
- [6] Gupta M M, Zhang J. High Accuracy Multigrid Solution of the 3D Convection-Diffusion Equation [J]. Appl Math Comput, 2000, 113: 249-274

## 附录 A

$$\sum_{nb=1\sim 18} a_{nb}\varphi_{nb} - a_p\varphi_{i,j,k} = rhs_{i,j,k}$$

$$a_1 = H_2L_yA_z + H_3L_zA_y + (K_2 + K_3)A_yA_z$$

$$a_2 = H_1L_xA_z + H_3L_zA_x + (K_1 + K_3)A_xA_z$$

$$a_3 = A_z + H_3L_z(B_x + B_y) + (K_1 + K_3)B_xA_z + (K_2 + K_3)B_yA_z$$

$$a_5 = H_2R_yA_z + H_3L_zC_y + (K_2 + K_3)C_yA_z$$

$$a_6 = H_1L_xA_y + H_2L_yA_x + (K_1 + K_2)A_xA_y$$

$$a_7 = A_y + H_2L_y(B_x + B_z) + (K_1 + K_2)B_xA_y + (K_2 + K_3)A_yB_z$$

$$a_8 = H_1R_xA_y + H_2L_yC_x + (K_1 + K_2)C_xA_y$$

$$a_9 = A_x + H_1L_x(B_y + B_z) + (K_1 + K_2)A_xB_y + (K_1 + K_3)A_xB_z$$

$$a_{10} = C_x + H_1R_x(B_y + B_z) + (K_1 + K_2)C_xB_y + (K_1 + K_3)C_xB_z$$

$$a_{11} = H_1L_xC_y + H_2R_yA_x + (K_1 + K_2)A_xC_y$$

$$a_{12} = C_y + H_2R_y(B_x + B_z) + (K_1 + K_2)B_xC_y + (K_2 + K_3)C_yB_z$$

$$a_{13} = H_1R_xC_y + H_2R_yC_x + (K_1 + K_2)C_xC_y$$

$$a_{14} = H_2L_yC_z + H_3R_zA_y + (K_2 + K_3)A_yC_z$$

$$a_{15} = H_1L_xC_z + H_3R_zA_x + (K_1 + K_3)A_xC_z$$

$$a_{16} = C_z + H_3R_zB_x + H_3R_zB_y + (K_1 + K_3)B_xC_z + (K_2 + K_3)B_yC_z$$

$$a_{17} = H_1R_xC_z + H_3R_zC_x + (K_1 + K_3)C_xC_z,$$

$$a_{18} = H_2R_yC_z + H_3R_zC_y + (K_2 + K_3)C_yC_z$$

$$a_p = B_x + B_y + B_z + (K_1 + K_2)B_xB_y + (K_1 + K_3)B_xB_z + (K_2 + K_2)B_yB_z$$

$$\begin{aligned} rhs_{i,j,k} = & [H_1L_x + (K_1 - 1.5H_1^2)A_x]s_{i-1,j,k} + [H_1R_x + (K_1 - 1.5H_1^2)C_x]s_{i+1,j,k} \\ & + [H_2L_y + (K_2 - 1.5H_2^2)A_y]s_{i,j-1,k} + [H_2R_y + (K_2 - 1.5H_2^2)C_y]s_{i,j+1,k} \\ & + [H_3L_z + (K_3 - 1.5H_3^2)A_z]s_{i,j,k-1} + [H_3R_z + (K_3 - 1.5H_3^2)C_z]s_{i,j,k+1} \\ & + [1 + (K_1 - 1.5H_1^2)B_x + (K_2 - 1.5H_2^2)B_y + (K_3 - 1.5H_3^2)B_z]s_{i,j,k} \end{aligned}$$

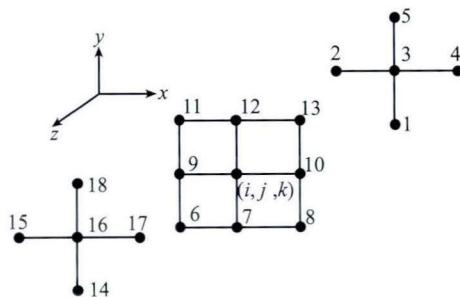


图 A1-1 三维十九点离散图案

Fig. A1-1 Discrete stencil for three dimensional 19 points