

有限体积法与 LBM 分区耦合模拟方腔自然对流

栾辉宝, 徐辉, 陈黎, 陶文铨

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 在已有的密度分布函数重构算子的基础上, 推导出了温度分布函数的重构算子, 解决了格子 Boltzmann 方法 (LBM) 与有限体积法耦合计算传热问题的关键难题. 选二维方腔自然对流对耦合方法进行了考核. 在瑞利数 $Ra=10^3\sim 10^6$ 范围内, 耦合结果同商业软件 FLUENT 结果符合得很好, 并且各物理量在耦合界面处连续且光滑过渡. 通过残差曲线可以看出, 耦合模型在密网格以及大瑞利数情况下, 数值稳定性要好于单一 LBM.

关键词: 格子 Boltzmann 方法; 有限体积法; 多尺度; 耦合

中图分类号: TB13 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2011)05-0078-06

Coupling of FVM and LBM for Natural Convection in a Square Cavity

LUAN Huibao, XU Hui, CHEN Li, TAO Wenquan

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: On the basis of the existing density distribution function reconstruction operator, the temperature distribution function reconstruction operator was derived to calculate heat transfer by coupling of the lattice Boltzmann method (LBM) and the finite volume method (FVM). The present coupling method was validated by the 2D natural convection flow in a square cavity with various Rayleigh numbers (Ra) from 10^3 to 10^6 . The results from the coupling method agree well with those by commercial software FLUENT, and all the physical quantities cross the coupled interface smoothly. According to residual history curves it is likely that the numerical stability of the present method are better than those of the pure LBM at fine grid numbers and high Ra .

Keywords: lattice Boltzmann method; finite volume method; multiscale; coupling

自然界与工程领域中的许多物理现象或过程常常发生在涵盖几个数量级的空间及时间范围内, 被称之为多尺度物理学现象^[1-2]. 近年来, 多尺度数值模拟为研究多尺度现象提供了一条很好的途径. 常见的数值模拟方法根据其适用范围通常可以分为 3 个层次: 宏观层次^[3-4], 如有限差分法 (FDM)、有限体积法 (FVM)、有限元法 (FEM) 等; 介观层次, 如格子 Boltzmann 方法 (LBM)、直接模拟蒙特卡洛法 (DSMC) 等; 微观层次, 例如分子动力学模拟法 (MDS)、量子力学 (QMS) 等. 各种数值模拟方法都受限于一一定的努森数 Kn 取值范围, 并且有与之对

应的控制方程. 对于本身包含多种尺度的物理过程, 试图只用一种数值模拟方法来研究, 即使是可能的话, 其有效性、经济性和对过程本质揭示的深度都可能受到限制. 如仅采用宏观方法, 则会存在一些不足, 诸如无法预知细微部分的过程以及引入一些经验性很强的参数; 如果仅采用介观或者微观模型, 需要的计算机资源往往是难以承受的. 例如在纳微米流动中, 分子动力学受限于计算机资源的需求, 不能用于整个流动区域的模拟, 而 Navier-Stokes 方程不能描述纳微米流动中连续介质假设不成立的区域.

收稿日期: 2010-09-07. 作者简介: 栾辉宝 (1983-), 男, 博士生; 陶文铨 (联系人), 男, 教授, 博士生导师, 中国科学院院士. 基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目 (50636050).

网络出版时间: 2011-01-17

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20110117.1044.001.html>

鉴于单一方法的不足,多尺度耦合模型就应运而生。通过建立起几种层次上方法的耦合模型,有望将宏观方法的高效性与介观、微观方法的精确性结合起来,相互补充,扬长避短^[1-2]。在宏观方法中,FVM 推导出的离散方程可以保证具有守恒特性,而且离散方程系数的物理意义明确,是目前流动与传热的数值计算中应用最广泛的一种方法^[3-4]。同时,LBM 是近 10 年来发展最迅速的介观模拟方法,具有物理图像清晰、边界条件易于实施、并行效率高等突出优点^[5-7]。发展 FVM 与 LBM 的宏观-介观耦合模型是非常有应用前景的。已有的关于 FVM 与 LBM 耦合计算的模型均是基于等温流动的^[8-9]。考虑到许多实际流动问题都包含有温度的变化或受到热效应的影响,本文构造了用于计算非等温流动问题的 FVM 与 LBM 耦合模型。

1 FVM-LBM 耦合方法

1.1 LBM 模型

LBM 采用标准的二维九速(D2Q9)模型。求解温度场采用双分布函数(DDF)格子模型^[5-6],其中密度分布函数 $f_i(x,t)$ 用于模拟速度场,而温度分布函数 $g_i(x,t)$ 用于模拟温度场。

在模拟方腔自然对流问题时,为便于处理由温差引起的浮升力项,常常采用 Boussinesq 假设^[4]。重力项中的密度可以表示为

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (1)$$

式中: ρ_0 和 T_0 是冷面的密度和温度; β 为体胀系数。重力项可以表示为

$$\mathbf{G} = \rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 \beta \mathbf{g} (T - T_0) \quad (2)$$

式中: \mathbf{g} 为重力加速度。

Boussinesq 方程使用 LBM 求解可以通过在演化方程右侧加入外力项来实现^[5],式(2)改写为

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{1}{\tau_f} [f_i(x, t) - f_i^{\text{eq}}(x, t)] + F_i \quad (3)$$

$$F_i =$$

$$\omega_i \rho \left(1 - \frac{1}{2\tau_f} \right) \left[\frac{3}{c^2} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}) + \frac{9}{c^4} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F})^2 - \frac{3}{c^2} \mathbf{F}^2 \right] \quad (4)$$

式中: $\mathbf{F} = -\beta \mathbf{g} (T - T_0)$ 。

1.2 FVM 模型

FVM 是在流动与传热问题求解中应用最广泛的一种数值方法。在 FVM 中,压力修正算法是求解不可压流场的主导方法。该算法于 1972 年在国

际上首次由著名学者 Patankar 和 Spalding 提出,并被命名为求解压力耦合方程的半隐算法(SIMPLE 算法)。近年来,作者所在研究团队对 SIMPLE 算法进行了改进,先后提出了 CLEAR 和 IDEAL 算法。数值实验证明,新的算法能在一定程度上克服 SIMPLE 算法的不足,并且大大提高了计算的收敛速度和算法的健壮性。

宏观部分的模拟 FVM 部分采用基于同位网格的 IDEAL^[10]程序。

1.3 密度分布函数重构算子

FVM 与 LBM 耦合的难点在于:如何将耦合界面上的宏观信息量准确地传递给 LBM 中需要的分布函数。以图 1 所示耦合模型为例,计算区域被划分为 2 块,左侧采用 FVM 求解,右侧采用 LBM 求解,中间是重合区。MN 是 FVM 区域的右边界,AB 是 LBM 区域的左边界。MN 边界上的值可以由 LBM 区域对应点上的宏观值得到,然而 AB 边界上的粒子分布函数就不能直接由 FVM 区域对应点上的宏观量直接得到,需要根据重构算子进行重构。作者先前的工作^[8-9]已经推导出了式(5)所示的密度分布函数重构算子,并成功地应用到模拟二维等温流动问题中。在此为了节省篇幅,仅给出密度分布函数重构算子的表达式

$$f_i = f_i^{\text{eq}} [1 - \tau_f \Delta t U_{\beta} c_s^{-2} (U_{i\alpha} \partial_{x_\alpha} u_\beta + \nu \partial_{x_\alpha}^2 u_\beta + \varphi^{-1} S_{\alpha\beta} \partial_{x_\alpha} \rho)] \quad (5)$$

式中: $U_{i\alpha} = c_{i\alpha} - u_\alpha$; $S_{\alpha\beta} = \partial_{x_\beta} u_\alpha + \partial_{x_\alpha} u_\beta$ 。

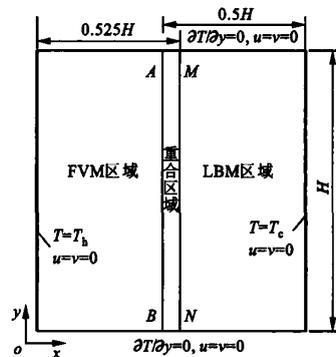


图 1 FVM 与 LBM 分区耦合示意图

1.4 温度分布函数重构算子

对于模拟传热问题,耦合边界上仅有密度分布函数重构算子是不够的,还需要通过宏观物理量重构出温度分布函数,即要得到关于温度分布函数的重构算子。

使用 Chapman-Enskog 方法,对时间导数、空

间导数和温度分布函数进行多尺度展开

$$\partial_t = \epsilon \partial_t^{(1)} + \epsilon^2 \partial_t^{(2)} \quad (6)$$

$$\partial_{x_a} = \epsilon \partial_{x_a}^{(1)} \quad (7)$$

$$g_i = g_i^{(0)} + \epsilon g_i^{(1)} + \epsilon^2 g_i^{(2)} \quad (8)$$

类似于 f_i 的推导过程^[8-9], g_i 在 ϵ^0 、 ϵ^1 和 ϵ^2 上的表达式为

$$\epsilon^0: g_i^{(0)} = g_i^{\text{eq}} \quad (9)$$

$$\epsilon^1: g_i^{(1)} = -\Delta t \tau_g D_i^{(1)} g_i^{(0)} + O[(\Delta t)^2] \quad (10)$$

$$\epsilon^2: g_i^{(2)} = -\Delta t \tau_g [D_i^{(1)} g_i^{(1)} + \partial_t^{(2)} g_i^{(0)}] - \frac{(\Delta t)^2 \tau_g}{2} [D_i^{(1)}]^2 g_i^{(0)} + O[(\Delta t)^3] \quad (11)$$

式中: $D_i = \partial_t + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}$. 对式(10)、(11) 求零阶速度矩, 可以得到 $t_1 = \epsilon t$ 和 $t_2 = \epsilon^2 t$ 时间尺度上的宏观方程

$$\partial_t^{(1)} T + \partial_{x_a}^{(1)} (u_a T) = 0 \quad (12)$$

$$\partial_t^{(2)} T = a_T [\partial_{x_a}^{(1)}]^2 T \quad (13)$$

式中: $a_T = c_i^2 \left(\tau_g - \frac{1}{2} \right) \Delta t$.

根据链导法则, 可得

$$\partial_x g_i^{\text{eq}} = \partial_T g_i^{\text{eq}} \partial_T T + \partial_{u_\beta} g_i^{\text{eq}} \partial_{u_\beta} u_\beta \quad (14)$$

$$\partial_x g_i^{\text{eq}} = \partial_T g_i^{\text{eq}} \partial_T T + \partial_{u_\beta} g_i^{\text{eq}} \partial_{u_\beta} u_\beta \quad (15)$$

根据 g_i^{eq} 的表达式, 对其求导得

$$\partial_{u_\beta} g_i^{\text{eq}} = \partial_{u_\beta} [\omega_i T (1 + \bar{c}_i^2 c_{i\gamma} u_\gamma)] = \bar{c}_i^2 \omega_i T c_{i\beta} \quad (16)$$

$$\partial_T g_i^{(0)} = \partial_T [\omega_i T (1 + \bar{c}_i^2 c_{i\gamma} u_\gamma)] = T^{-1} g_i^{\text{eq}} \quad (17)$$

从而可以构造出 g_i 的一阶项

$$\begin{aligned} g_i^{(1)} = & -\tau_g \Delta t D_i^{(1)} g_i^{(0)} = \\ & -\tau_g \Delta t (\partial_t^{(1)} g_i^{(0)} + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} g_i^{(0)}) = \\ & -\tau_g \Delta t [\partial_T g_i^{(0)} \partial_t^{(1)} T + \partial_{u_\beta} g_i^{(0)} \partial_{u_\beta}^{(1)} u_\beta + \\ & c_{i\alpha} (\partial_T g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} T + \partial_{u_\beta} g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} u_\beta)] = \\ & -\tau_g \Delta t [-\partial_T g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} (u_\alpha T) - \\ & \rho^{-1} \partial_{u_\beta} g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} (\rho u_\alpha u_\beta + p \delta_{\alpha\beta}) + \\ & c_{i\alpha} (\partial_T g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} T + \partial_{u_\beta} g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} u_\beta)] = \\ & -\tau_g \Delta t [-u_\alpha \partial_T g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} T - u_\alpha \partial_{u_\beta} g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} u_\beta - \\ & \rho^{-1} \partial_{u_\beta} g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} (p \delta_{\alpha\beta}) + \\ & c_{i\alpha} \partial_T g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} T + c_{i\alpha} \partial_{u_\beta} g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} u_\beta] = \\ & -\tau_g \Delta t [U_{i\alpha} \partial_T g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} T + U_{i\alpha} \partial_{u_\beta} g_i^{(0)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} u_\beta - \\ & \rho^{-1} \partial_{u_\beta} g_i^{(0)} \partial_{x_\beta}^{(1)} p] = -\tau_g \Delta t [U_{i\alpha} T^{-1} g_i^{\text{eq}} \partial_{x_\alpha}^{(1)} T + \\ & U_{i\alpha} \omega_i T c_{i\beta} \bar{c}_i^2 \partial_{x_\alpha}^{(1)} u_\beta - \rho^{-1} \omega_i T c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} \rho] \quad (18) \end{aligned}$$

g_i 的二阶项可以表示为

$$\begin{aligned} g_i^{(2)} = & -\tau_g \Delta t \left\{ \partial_t^{(2)} g_i^{(0)} + \left(1 - \frac{1}{2\tau_g} \right) D_i^{(1)} g_i^{(1)} \right\} = \\ & -\tau_g \Delta t \left\{ \partial_t^{(2)} g_i^{(0)} - \left(\tau_g - \frac{1}{2} \right) \Delta t D_i^{(1)} [D_i^{(1)} g_i^{(0)}] \right\} = \\ & -\tau_g \Delta t \{ \partial_t^{(2)} g_i^{(0)} - \alpha_T c_s^{-2} [D_i^{(1)}]^2 g_i^{(0)} \} \quad (19) \end{aligned}$$

式(19)中最后一个花括号内的第2项较第1项是个小量, 可以忽略. 上式可以简化为

$$\begin{aligned} g_i^{(2)} = & -\tau_g \Delta t \partial_t^{(2)} g_i^{(0)} = -\tau_g \Delta t [\partial_T g_i^{(0)} \partial_t^{(2)} T + \\ & \partial_{u_\beta} g_i^{(0)} \partial_{u_\beta}^{(2)} u_\beta] = -\tau_g \Delta t \{ a_T \partial_T g_i^{(0)} [\partial_{x_\alpha}^{(1)}]^2 T + \\ & \omega_i c_{i\beta} c_s^{-2} \rho^{-1} T \partial_{t_2} (\rho u_\beta) \} = -\tau_g \Delta t \{ a_T T^{-1} g_i^{(0)} [\partial_{x_\alpha}^{(1)}]^2 T + \\ & \omega_i c_{i\beta} c_s^{-2} \rho^{-1} T v [\partial_{x_\alpha}^{(1)} (\rho (\partial_{x_\alpha}^{(1)} u_\beta + \partial_{x_\beta}^{(1)} u_\alpha))] \} = \\ & -\tau_g \Delta t \{ a_T T^{-1} g_i^{(0)} (\partial_{x_\alpha}^{(1)})^2 T + \\ & \omega_i c_{i\beta} c_s^{-2} \rho^{-1} T v [\rho \partial_{x_\alpha}^{(1)} (\partial_{x_\alpha}^{(1)} u_\beta + \partial_{x_\beta}^{(1)} u_\alpha) + \\ & (\partial_{x_\alpha}^{(1)} u_\beta + \partial_{x_\beta}^{(1)} u_\alpha) \partial_{x_\alpha}^{(1)} \rho] \} = \\ & -\tau_g \Delta t \{ a_T T^{-1} g_i^{(0)} (\partial_{x_\alpha}^{(1)})^2 T + \omega_i c_{i\beta} c_s^{-2} \rho^{-1} T v \cdot \\ & [\rho (\partial_{x_\alpha}^{(1)})^2 u_\beta + S_{i\beta}^{(1)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} \rho] \} \quad (20) \end{aligned}$$

最终, 可以得到温度分布函数 g_i 的重构算子

$$\begin{aligned} g_i = & g_i^{(0)} + \epsilon g_i^{(1)} + \epsilon^2 g_i^{(2)} + \dots = g_i^{\text{eq}} - \tau_g \Delta t \cdot \\ & [U_{i\alpha} T^{-1} g_i^{\text{eq}} \partial_{x_\alpha} T + U_{i\alpha} \omega_i T c_{i\beta} \bar{c}_i^2 \partial_{x_\alpha} u_\beta - \\ & \rho^{-1} \omega_i T c_{i\beta} \bar{c}_i^2 \partial_{x_\alpha} \rho] - \tau_g \Delta t \{ a_T T^{-1} g_i^{\text{eq}} (\partial_{x_\alpha}^{(1)})^2 T + \\ & \omega_i c_{i\beta} c_s^{-2} \rho^{-1} T v [\rho (\partial_{x_\alpha}^{(1)})^2 u_\beta + S_{i\beta}^{(1)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} \rho] \} = \\ & g_i^{\text{eq}} \{ 1 - \tau_g \Delta t T^{-1} [U_{i\alpha} \partial_{x_\alpha} T + a_T (\partial_{x_\alpha}^{(1)})^2 T] \} + \\ & \frac{\tau_g \omega_i T c_{i\beta}}{\tau_i U_{i\beta}} \frac{(f_i - f_i^{\text{eq}})}{f_i^{\text{eq}}} + \tau_g \Delta t \omega_i c_{i\beta} T \rho^{-1} \partial_{x_\beta} \rho \quad (21) \end{aligned}$$

式中: f_i 可以通过密度重构算子式(5)求得.

2 耦合计算实例

为了验证温度分布函数重构算子能否正确应用于模拟传热流动问题, 选取具有基准解的方腔自然对流来进行研究. 方腔自然对流是研究传热流动的经典问题, 已有很多学者对此进行了研究^[11-12]. 图1给出了计算模型, 左壁面为高温壁面 ($T_h = 1$ K), 右壁面为低温壁面 ($T_c = 0$ K), 上下壁面绝热. 方腔被分为左右2个区域, 左侧采用FVM进行求解, 右侧采用LBM进行求解, 两者在耦合界面上进行信息传递. 区域尺寸为 $H = 1$ m, 网格数为 201×201 . 流体的普朗特数 $Pr = \nu/a$ 固定为 0.71, 密度 $\rho = 1.0$ kg/m³, 运动黏度 $\nu = 1.3 \times 10^{-5}$ m²/s, 重力加速度 $g = 9.8$ m/s² (方向垂直向下). 在瑞利数 $Ra = g\beta H^3 \Delta T / \alpha \nu$ 为 $10^3 \sim 10^6$ 的范围内进行模拟, 并将FVM-LBM结果同商业软件FLUENT的结果进行了对比.

图2~7给出了 $Ra=10^3$ 和 $Ra=10^6$ 时的流线、等温线、 u 速度等值线、 v 速度等值线、压力等值线以及涡量等值线图。可以看出,在流线、等温线以及速度线图中,耦合方法同 FLUENT 结果非常一致,并且这些物理量在耦合界面上连续且光滑过渡。在压力等值线以及涡量等值线中,耦合模型在界面两侧物理量存在偏差。其原因为 FVM 采用不可压缩模型,标准格子模型具有弱可压性,AB 边界(图1所示)上的密度无法由 FVM 直接传递给 LBM,而需要根据 LBM 区域内部邻近边界的值进行外推得到。

最后,统计了局部 Nu 及其平均值 Nu_m , 定义如下

$$Nu = -\frac{H}{\Delta T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \quad (22)$$

$$Nu_m = \int_0^H Nudy \quad (23)$$

式中: H 为方腔几何高度。

表1给出了耦合模型的计算结果同文献[12]结果的对比,其中 Nu_{max} 代表高温竖壁上局部 Nu 的最大值, Nu_{min} 代表高温竖壁上局部 Nu 的最小值。从表中可以看出,耦合模型计算结果同文献值符合得很好。

本文还进一步比较了单一方法与耦合方法的收敛特性,收敛判据定义如下

$$\left(\sum \sum |u(i,j,t+\Delta t) - u(i,j,t)| + \sum \sum |v(i,j,t+\Delta t) - v(i,j,t)| \right) / \sum \sum (|u(i,j,t)| + |v(i,j,t)|) \leq e \quad (24)$$

图8a给出了 $Ra=10^3$ 情况下单一热格子模型随网格数目变化时的收敛曲线。可以看出,随着网格的加密,最终收敛的残差值增大。其原因为过分

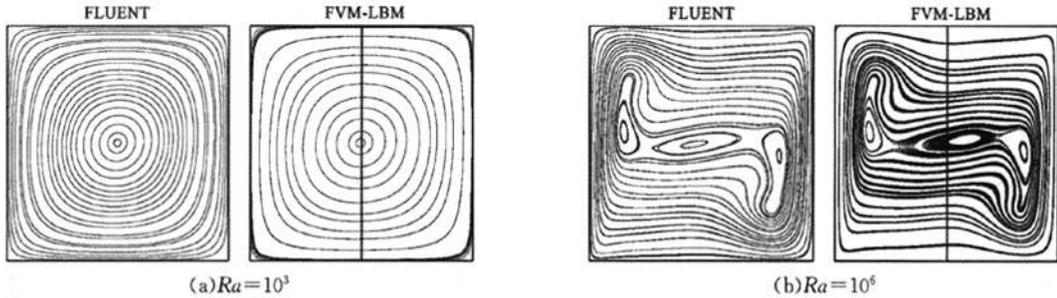


图2 不同 Ra 时的流线图

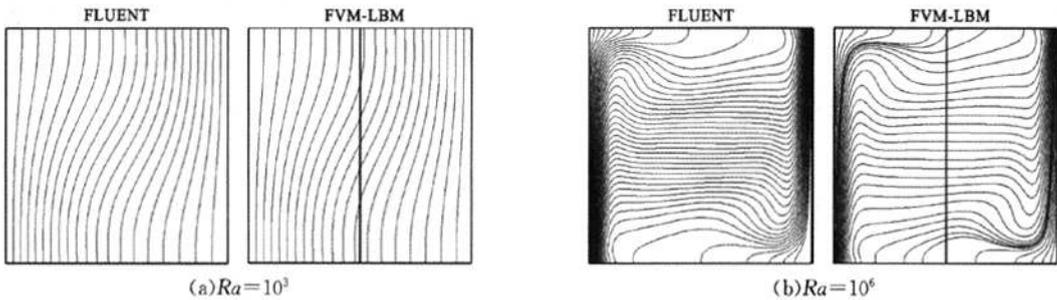


图3 不同 Ra 时的等温线图

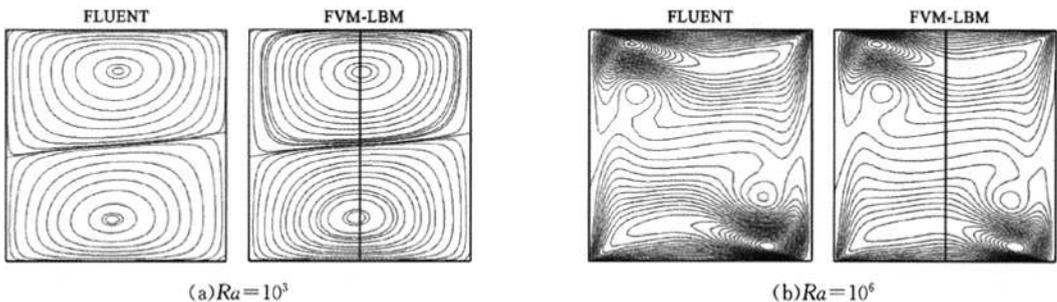
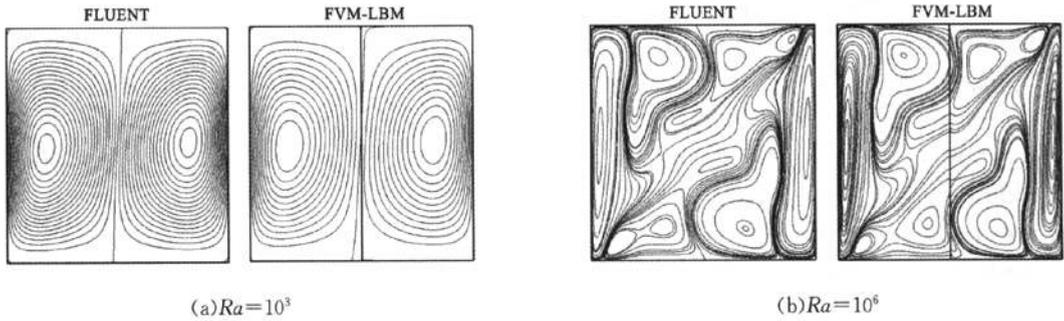
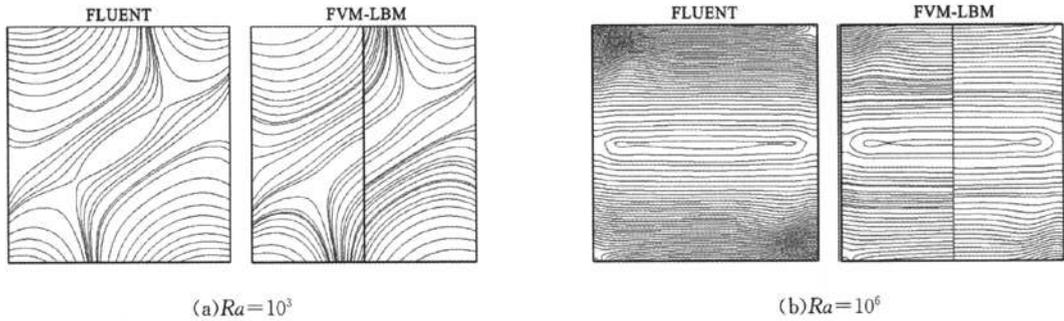
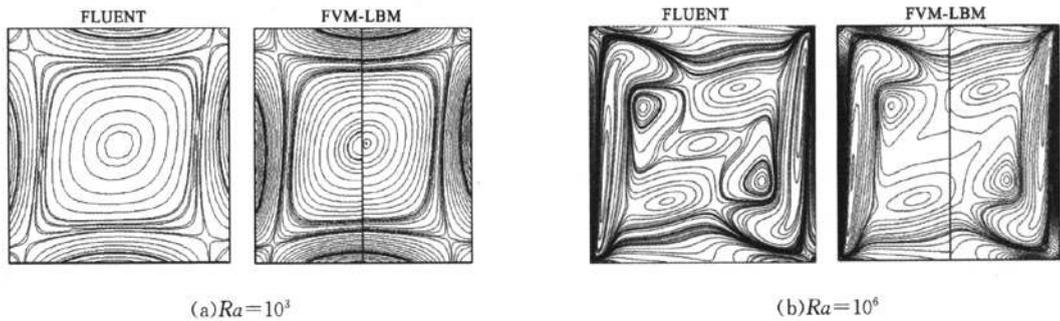


图4 不同 Ra 时的 u 速度等值线图

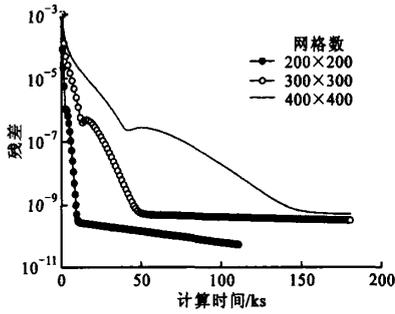
图5 不同 Ra 时的 v 速度等值线图图6 不同 Ra 时的压力等值线图图7 不同 Ra 时的涡量等值线图表1 Nu 及其最大值和最小值位置与文献值的对比

参数	$Ra=10^3$		$Ra=10^4$		$Ra=10^5$		$Ra=10^6$	
	本文	文献[12]	本文	文献[12]	本文	文献[12]	本文	文献[12]
Nu_{\min}	1.110	1.114	2.230	2.245	4.507	4.510	8.807	8.806
Nu_{\max}	1.561	1.581	3.539	3.539	7.738	7.637	17.710	17.442
$(y/H)_{\max}$	0.099	0.099	0.145	0.143	0.083	0.085	0.375	0.368
Nu_{\min}	0.690	0.670	0.584	0.583	0.746	0.773	0.978	1.001
$(y/H)_{\min}$	0.995	0.994	0.995	0.994	0.997	0.999	0.997	0.999

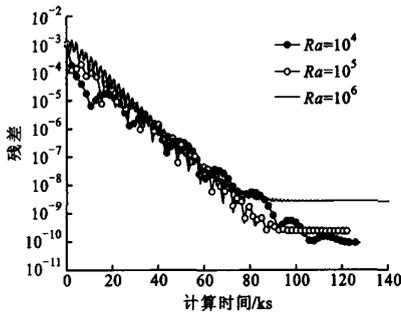
细密的网格要大大增加计算机的运算次数,舍入误差会增加^[4]。从图8b可以看出,单一热格子模型随着 Ra 的增加,收敛曲线的振荡越加剧烈,数值不稳定性越加明显,收敛时的残差值会随之增大。这种不稳定性是热格子模型本身固有的不足。

图9比较了 $Ra=10^6$ 、网格数为 400×400 情况

下的耦合方法与单一 LBM 的收敛曲线。可以看出,耦合方法收敛曲线的振荡较 LBM 方法明显减弱,并且收敛时的残差值会有所降低。其原因是耦合方法引入了宏观 FVM 方法求解部分区域,这部分区域可以避免 LBM 方法固有的弱可压缩性及数值不稳定性,进而改善了计算结果。



(a) $Ra=10^3$



(b) 网格数为 400×400

图8 热格子模型随着 Ra 以及网格数变化的收敛曲线

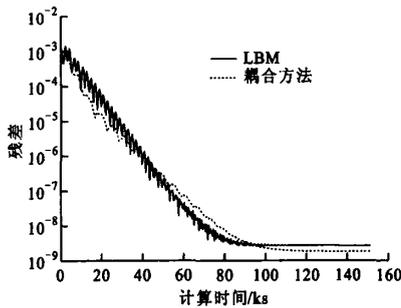


图9 $Ra=10^6$ 、网格数为 400×400 时耦合方法与LBM方法收敛曲线对比

3 结论

在已有的密度分布函数重构算子基础上,推导出温度分布函数的重构算子,解决了FVM与双分布函数LBM耦合计算非等温流动的难题。以二维方腔自然对流为例,对非等温耦合模型进行了验证。耦合模型的结果同文献以及FLUENT的结果在定性定量上都符合得很好,证明了密度以及温度重构算子的正确性以及耦合方法的可行性。通过比较大 Ra 以及密网格情况下的收敛曲线,发现耦合方法可以改善热格子模型的数值不稳定性。

参考文献:

- [1] E Weinan, ENGQUIST B, LI Xiantao, et al. Heterogeneous multiscale methods: a review [J]. Commun Comput Phys, 2007, 44: 367-450.
- [2] 陶文铨. 传热与流动问题的多尺度数值模拟: 方法与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [3] 陶文铨. 计算传热学的近代进展[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [4] 陶文铨. 数值传热学[M]. 2版. 西安: 西安交通大学出版社, 2000.
- [5] 郭照立, 郑楚光, 李青, 等. 流体动力学的格子 Boltzmann 方法[M]. 武汉: 湖北科学技术出版社, 2002.
- [6] 何雅玲, 王勇, 李庆. 格子 Boltzmann 方法的理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [7] HE Yaling, LI Qing, WANG Yong, et al. Lattice Boltzmann method and its application in engineering thermophysics [J]. Chinese Science Bulletin, 2009, 54 (22): 4177-4134.
- [8] 徐辉, 栾辉宝, 陶文铨. LBM 与宏观数值方法界面信息耦合的重构算子 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43 (11): 6-10.
- XU Hui, LUAN Huibao, TAO Wenquan. A reconstruction operator for interface coupling between LBM and macro-numerical method of finite-family[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(11): 6-10.
- [9] LUAN H B, XU H, CHEN L, et al. Numerical illustrations of the coupling between lattice Boltzmann method and finite-type macro-numerical methods [J]. Numer Heat Transfer: B, 2010, 57: 147-170.
- [10] SUN D L, QU Z G, HE Y L, et al. An efficient segregated algorithm for incompressible fluid flow and heat transfer problems-IDEAL (Inner Doubly Iterative Efficient Algorithm for Linked Equations): part I Mathematical formulation and solution procedure [J]. Numer Heat Transfer: B, 2008, 53: 1-17.
- [11] 童长青, 何雅玲, 王勇, 等. 封闭空腔自然对流的格子-Boltzmann 方法动态模拟 [J]. 西安交通大学学报, 2007, 41(1): 32-36.
- TONG Changqing, HE Yaling, WANG Yong, et al. Simulation of transient natural convection in square cavity with incompressible thermal lattice-Boltzmann method [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007, 41(1): 32-36.
- [12] BARAKOS G, MITSOULIS E. Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall function [J]. Int J Numer Method Fluids, 1994, 18: 695-719.

(编辑 荆树蓉)