

无网格方法在流动和传热问题中的应用

陶文铨¹, 吴学红², 戴艳俊¹

- (1. 动力工程多相流国家重点实验室(西安交通大学), 陕西省 西安市 710049;
2. 郑州轻工业学院机电工程学院, 河南省 郑州市 450002)

Applications of Meshless Methods in Fluid Flow and Heat Transfer Problems

TAO Wen-quan¹, WU Xue-hong², DAI Yan-jun¹

- (1. State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering (Xi'an Jiaotong University), Xi'an 710049, Shaanxi Province, China; 2. School of Electromechanical Science and Engineering, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, Henan Province, China)

ABSTRACT: A review of meshless methods applied in computational fluid dynamics and heat transfer fields in recent years was presented. This paper described the applications of numerical simulation of meshless methods in heat conduction, radiation and fluid flow problems. In addition, a special attention was paid on the treatment of the convective term of the incompressible fluid flow. In this paper, our results in heat conduction and fluid flow problems were also briefly introduced. Our investigation results show that meshless methods have better computational precision in computing heat conduction problems of irregular domain than the finite volume method, but they need more computational time. At the same time, meshless methods need to be further developed for solving incompressible fluid flow problems. Meshless methods should construct better discretization scheme to improve computational precision in dealing with convection-dominated problems, and the pressure term needs special treatment to overcome oscillating pressure field.

KEY WORDS: meshless method; heat conduction; radiation; convection-diffusion; incompressible fluid flow; upwind scheme

摘要: 综述了无网格方法在导热、辐射、对流扩散及不可压缩流动问题数值计算中的应用。给出不可压缩流动问题对流项的处理方法。简要介绍笔者对传热与流动问题的计算结果, 研究结果表明: 与有限容积法相比, 无网格方法在计算不规则区域导热问题时有更高的计算精度, 但它需要更多的计算时间; 同时, 无网格方法在计算不可压缩流动问题时还不成熟和完善, 特别在计算对流项占优流动问题时, 需要构建更好的对流项格式去提高计算的精度, 同时压力项也需要

特别处理以克服振荡压力场的产生。

关键词: 无网格方法; 导热; 辐射; 对流-扩散; 不可压缩流动; 迎风格式

0 引言

无网格方法在发展的初期, 主要应用于计算力学。最近一些研究者将其应用于计算传热学与计算流体动力学之中。国外对其研究得比较早, 我国在无网格方法的研究和应用方面近几年进展迅速, 尤其在材料和力学的领域^[1-4], 但在传热与流动的领域, 还未见类似的论文发表, 在综述论文[4]中虽然提到该方法在求解导热问题中的应用, 但介绍过于简单。鉴于此, 在文献[5]中简要介绍了无网格法的理论基础和求解方法, 本文主要介绍其在传热和流动问题中的应用进展。无网格方法在导热与辐射问题中的大量计算实例表明, 这种方法在处理不规则边界问题时具有特殊优越性, 除了无网格方法的计算工作量较大这一缺点外, 不存在特殊的数值处理问题, 但是将无网格方法应用于流动问题时, 与在有限差分、有限容积法中一样, 对流项的离散方式影响到计算的稳定性, 因此本文将做较深入讨论, 特别对于流动问题数值求解的关键问题之一——对流项的离散处理方法做专门介绍。

1 无网格方法在导热和辐射问题中的应用

Zerroukat 等^[6]用径向基函数(radial basis functions, RBF)作为插值函数, 用配点法求解热传导问题。他们的研究结果显示: 这种无网格方法能很好地计算一维及二维非稳态热传导问题, 对不规则区

基金项目: 国家自然科学基金项目(50636050)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (50636050).

域的计算也有较好的计算精度;同时如用全局径向函数(global radial functions),形成的刚度矩阵是非稀疏的,随着配点数的增加易产生病态矩阵。Belytschko等^[7]用无单元 Galerkin 方法(element-free Galerkin method, EFG)计算在边界处具有大梯度的热传导问题。他们的研究结果显示:在计算边界处具有大梯度的问题时,EFG 方法的计算结果比有限元法的计算结果更好;其计算的收敛率比有限元法要快。Cleary 和 Monaghan^[8]应用光滑粒子流体力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)方法计算非稳态热传导问题。Chen 等^[9]用修正的 SPH 方法计算非稳态导热问题。Yagawa 和 Furukawa^[10]用自由网格方法(free mesh method, FMM)计算二维热传导问题,其研究结果显示:相比有限元方法,FMM 方法能给出很好的计算精度。Singh 和他的合作者用 EFG 方法分别计算了一系列的热传导问题,包括二维翅片导热问题^[11]、三维稳态导热问题^[12]、非稳态热传导问题^[13]和复合导热问题^[14],并行计算热传导问题^[15]、非线性导热问题^[16],相关计算结果显示,EFG 方法的计算精度要高于有限元方法的计算精度^[16]。Sladek 及其合作者用局部边界积分方法(local boundary integral equation, LBIE),并用 Heaviside 函数作为检验函数,分别计算了梯度材料中的导热问题^[17]、二维非齐次各向异性材料的非稳态导热问题^[18]、导热的反问题^[19]、三维非稳态导热问题^[20]。刘岩和杨海天^[21]用有限元/无单元 Galerkin (EFG/FE-EFG)方法求解热传导问题。刘岩等^[22]用加权最小二乘无网格方法计算二维稳态与非稳态导热问题。Divo 和 Kassab^[23]用配点型无网格方法计算已知速度场的对流扩散问题的传热。Qian 和 Batra^[24]用高阶板理论和无网格局部 Petrov-Galerkin 法(meshless local Petrov-Galerkin, MLPG)分析具有分析解的材料中的三维热传导问题,这种高阶板理论在厚度方向用一个多项式表达,使得三维问题的计算变成一个二维问题的计算。范悦宏^[25]应用 EFG 方法计算二维稳态与非稳态的热传热问题。李庆华和陈莘莘^[26]用加权最小二乘法计算二维稳态热传导问题。李庆华等^[27]用 MLPG 方法计算二维稳态热传导问题。贺光宗等^[28]用无网格法计算二维热传导问题。张雷等^[29]用配点型无网格方法计算二维稳态及非稳态热传导问题。高志华等^[30]用 EFG 方法计算液态凝固过程的温度场。Ching 和 Yen^[31]用 MLPG 方法计算了二维具有分析解的材料中非稳态热弹性变形问题。Wang 等^[32]用径向基函数作

为插值函数,构建了配点型虚边界点法,并用此方法计算导热问题,该方法具有较好的计算效率。Sadat 等^[33]用扩散近似法(diffuse approximation method, DAM)方法计算二维热传导问题,但该方法在计算复杂区域时易产生病态矩阵。王虎奇等^[34]用 MLPG 方法计算二维瞬态热传导问题。程荣军和程玉民用有限点方法计算一维^[35]和二维^[36]带源项的热传导问题的反问题。李庆华等^[37]用自然邻近无网格 Petrov-Galerkin 方法求解二维稳态热传导问题。谭建宇和刘林华等用加权最小二乘方法计算了一维及二维辐射与导热耦合问题^[38-40]、吸收和散射介质中的辐射问题^[41]、瞬态辐射问题^[42]、热传导问题的反问题^[43]、比较计算了一阶与二阶辐射方程的精度及计算效率^[44]和最小二乘径向基函数配点方法^[45]计算辐射问题。

吴学红等^[46-48]分别用配点型 MLPG 方法和一般的 MLPG 方法计算了工程中二维不规则区域的稳态热传导问题,研究结果显示:1)无网格方法比有限容积法更能精确的描述计算区域的边界;2)配点型 MLPG 方法对支持域半径的选取比较严格,一般选取 2.5~3.0 倍的平均节点间距时有较高的计算精度,支持域过小或过大计算精度均较差;3)配点型 MLPG 在配点数较少情况下(文中的节点数为 336),其计算效率与有限容积法(FLUENT)差不多,但在相同的计算精度情况下,无网格方法需要更少的计算节点,但是随着节点数的增多无网格方法需要的计算时间要比有限容积法多的多;4)一般的 MLPG 方法由于需要应用高斯积分方法进行数值积分,因此需要更多的计算时间;5)在计算不规则区域积分时,即使积分子域不完全覆盖计算区域,也能给出较好的计算精度;6)无网格方法的计算精度要高于有限容积法的计算精度。

2 无网格方法在流体问题中的应用

2.1 在计算流体力学中的应用现状

无网格方法应用于计算流体力学领域还不成熟与完善,正处于起步阶段。

早期的 SPH 方法主要应用于计算流体力学领域^[49]。Monaghan 课题组对 SPH 应用于流体力学的计算做了一系列的研究^[50-56]。Morris 用 SPH 计算不可压缩流动问题^[57-58]和多孔介质中的流动问题^[59]。但 SPH 是一种配点法,在计算过程中对配点的选取非常重要;另一方面,SPH 在边界处的精度较低。Sadat 等^[60-62]应用扩散元法计算二维及三维不可压

缩流动问题。Oñate 等^[63]应用加权最小二乘插值的有限点法(finite point method, FPM)计算对流扩散和可压缩流动问题, 他们研究发现这种构建的有限点法有 2 个优点: 1) 相比标准的最小二乘法近似, 用高斯权函数构建的加权最小二乘近似的 FPM 方法能提高计算的精度; 2) 在满足插值函数自由度的前提下, 移动或删除节点对这种插值函数敏感性的影响很小, 而一般的最小二乘近似对节点的敏感性要大得多。为了更好地应用于对流扩散和可压缩流问题, 他们发展了一种残量稳定方法^[64](residual stabilization), 这种稳定方法只是在一般的对流扩散方程的基础上加上一个残留项, 后来定义这种稳定性方法为有限增量微积分法(finite increment calculus, FIC)^[65]; 但是这种方法在处理第二类边界条件时也需要采用增加稳定性的技术, 这些增加的稳定性技术对计算结果的影响是至关重要的。后来 Oñate 及合作者又应用加权最小二乘近似的 FPM 方法计算一些三维可压缩流问题^[66]。Yagawa 及其合作者用并行的 FMM 计算了不可压缩流动问题^[10,67-68]。Liu W K 的课题组用再生核粒子方法(reproducing kernel particle method, RKPM)并结合有限元的流线性迎风格式(streamline upwind Petrov-Galerkin, SUPG)计算对流扩散问题^[69]、不可压缩流动问题^[70-71]。Lin 和 Atluri 等^[72-74]用 MLPG 方法, 构建了 2 种迎风格式计算对流扩散与不可压缩流动问题, 他们的研究结果显示: 所构建的迎风格式能很好地处理对流扩散问题, 但在计算高 Re 数不可压缩流动问题时, 计算不收敛。Shu 等^[75]发展了径向基函数微分求积法(local radial basis function-differential quadrature, RBF-DQ)求解不可压缩流动问题, 但是这种方法在边界附近时需要布置几层正交节点。Liu G R 的课题组分别用有限点法^[76]和(meshfree weak-strong, MWS)方法^[77]计算不可压缩流动问题: 前一种方法利用节点 Taylor 展开对方程离散, 它类似于有限差分法; 后一种方法结合无网格方法的弱形式(MLPG)与强形式(配点法), 用涡量流函数计算, 这样不用考虑压力项产生的影响。

Arefmanesh 等^[78-79]用无网格控制容积法(meshless control volume method, MCVVM)计算流动问题, 这种方法的局部插值方法是基于 MLPG 的, 但用如拉格朗日多项式的方法构建具有 δ 属性的插值函数, 它是一种真正的无网格方法。我国学者也对无网格方法应用到计算流体力学领域做了一些研究。仇轶等用 EFG 方法计算一些简单的不可压缩

流动^[80]、圆柱绕流^[81]、流场中的颗粒运动^[82-83]问题。段日强等^[84]用半隐式移动粒子法(moving particle semi-implicit, MPS)直接数值模拟了液滴在瞬态脉冲冲下的破裂过程和加压液体在突然减压下的闪蒸射流。史宝军等^[85]将其于重构核思想的最小二乘配点法应用于流体力学中 Stokes 问题, 他们的研究结果表明: 无论离散点是均匀分布还是随机分布, 该方法均给出了较准确的数值结果。张小华^[86]用 EFG 方法计算二维定常与非定常对流扩散问题。胡晓燕^[87]研究了 SPH 方法和移动最小二乘粒子动力学方法(moving least squares particle hydrodynamics, MLSPH)用于多孔介质流体力学的计算, 但是这 2 种方法在计算过程中在交界面上经常产生非物理性的振荡现象, 他提出了解决或改善的方法。张云新^[88]用径向基函数计算不可压缩流体力学问题。谢永慧等^[89]应用 SPH 方法和有限元方法耦合求解水滴高速撞击汽轮机叶片的流动问题。吴学红^[48]用 MLPG 方法结合 SUPG 方法计算了对流扩散问题, 并将计算结果与文献[73]中迎风格式(MLPGU)的计算结果进行比较。研究结果显示: 1) 在对流作用不占优的低 Pe 数情况下, 无论有无固体边界存在有限容积的 2 种迎风格式(FUS, QUICK)和 3 种无网格方法(MLPG、MLPGU、MLPG-SUPG)都能给出较好的计算结果; 2) 在计算没有固体边界对流项占优问题(较高 Pe 数情况)时, FUS 格式有假扩散现象产生, 而无网格方法与 QUICK 格式都有一定的越界现象产生, 但在越界现象中, MLPG-SUPG 的越界范围最小, 相对于有限容积法, MLPG-SUPG 格式的计算精度要高于三阶格式(QUICK)的精度; 3) 在计算对流项占优且存在固体边界的问题时, MLPG 方法的计算结果较差, 所有迎风格式能给出较好计算结果。吴学红等^[48,90]用 MLPG 方法结合 SUPG 方法计算了不可压缩流动问题, 并用混合公式法克服或减轻产生棋盘型压力场的现象, 通过对顶盖驱动流、突扩后台阶流动及方腔自然对流 3 个例子的计算表明: 1) 在低的 Re 数或 Ra 数情况下, 与文献值相比, MLPG-SUPG 都能给出较好的计算结果; 2) 在较高 Re 数情况下, 计算值与文献的值还有一定的偏差; 3) 通过应用混合公式克服或减轻产生波形压力场的现象, 取得了比较成功的结果, 虽然所计算出的压力场仍然有些振荡, 但相应的速度场仍比较合理。通过将 MLPG 应用于计算对流扩散问题与不可压缩流动问题研究结果表明: 在计算对流项占优问题时, 必须构建稳定性较好的对

流项格式才能得出较好的计算结果。

2.2 对流项迎风格的构造

目前应用于计算流体动力学中的无网格方法主要有配点型无网格方法(FPM、SPH)、RKPM、MLPG方法、EFG方法等。很多作者用配点型无网格方法去计算流体动力学问题,他们构建一些类似于有限差分方法用Taylor展开的方法对对流项进行处理;但配点型无网格方法(FPM、SPH)不满足一致性的要求,而且对配点布置要求较高,需要大量的配点去提高计算的精度。RKPM方法中将SUPG格式应用于计算流体动力学,但是RKPM不是真正的无网格方法,它需要背景网格去进行数值积分。Lin等针对MLPG方法构建了迎风格式,并用混合公式方法处理压力项所产生的振荡,但这种迎风格式在计算高 Re 数($Re > 400$)时不收敛。

目前在无网格方法中常见的各类迎风格式有以下几种。

1) 有限增量微积分法。

有限增量微积分方法(FIC)由Oñate等^[65]于1998年提出。它的基本思想为,对于对流扩散方程,考虑有限区域上各种影响因素的平衡,对各变量做Taylor级数展开,将瞬态项和源项展开至一阶,对流项和扩散项展到二阶(理论上FIC方法能够建立更高的阶数)。Oñate及其合作者^[91-92]将最小二乘近似以配点形式应用于FIC的稳定形式的方程中,发展了有限点法(FPM)。从FIC的特点可以看出,这种稳定性的方法相似于有限差分方法,它不满足一致性条件,特征尺寸也不容易选取,而且FPM方法对配点的要求非常高,合理的选取配点是提高配点法计算精度的一个重要方面。

2) Lin等提出的迎风格式。

Lin等^[73]根据MLPG方法的特点提出2种对流项的处理方案。MLPG方法中的检验函数仅在积分子域内不为零,且在节点处取最大值的紧支函数,如MLS近似方案中的权函数。

第1种方案是通过对检验函数在积分子域上的最大值沿逆着流线的方向移动一定距离,如图1和2所示。

在计算区域 Ω_x 中,检验函数的积分子域在节点 x_i 处的最大值沿逆流方向移动了 $\gamma r_i s_i$,其中 r_i 是支持域半径, s_i 为节点 r_i 处的流动方向单位矢量,参数 γ 的定义如下:

$$\gamma = \frac{1}{2} \coth\left(\frac{Pe}{2}\right) - \frac{1}{Pe} \quad (1)$$

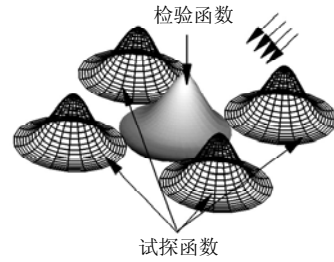


图1 第1种迎风格式

Fig. 1 Upwind scheme I

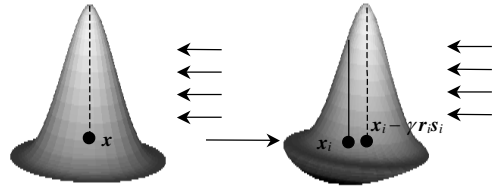


图2 最大值的迁移距离

Fig. 2 Shifting of the maximum value

式(1)是有限元方法在计算一维对流扩散问题精确解时推导出来的^[93],其中局部Peclet数的定义如下:

$$Pe = ur_i / a \quad (2)$$

式中 a 为热扩散率。

第2种方案为:在计算区域 Ω_x 中,检验函数形式不发生任何变化,只是将检验函数的积分子域逆着流动的方向移动 $\gamma r_i s_i$,如图3与4所示。其中参数 γ 和Peclet数的定义^[94]如下:

$$\gamma = \coth(Pe/2) - 2/Pe \quad (3)$$

$$Pe = (2ur_i) / a \quad (4)$$

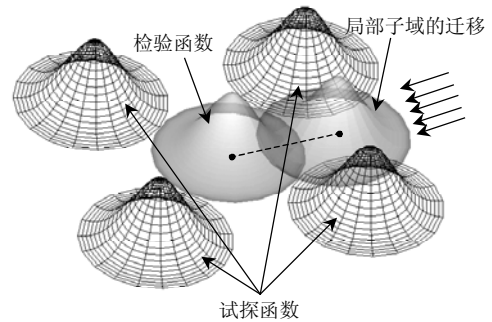


图3 第2种迎风格式图

Fig. 3 Upwind scheme II

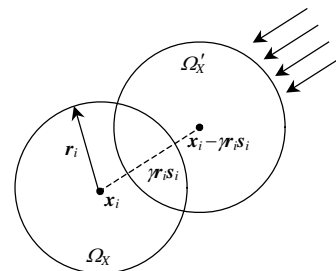


图4 局部子域移动的距离

Fig. 4 Shifting of local sub-domain

Lin 等将这 2 种迎风格式应用到对流-扩散问题^[72-73]、Burgers 问题^[72]与不可压缩流动问题^[72,74]进行验证, 他们研究发现第 2 种迎风格式的计算结果明显好于第 1 种迎风格式的计算结果, 而且第 2 种迎风格式的实施也比第 1 种迎风格式容易, 但是 2 种方案在计算高 $Re(Re>400)$ 的顶盖驱动流不可压缩流动问题时均不收敛。

3) SUPG 迎风格式。

Brooks 和 Hughes 于 1982 年提出了 SUPG 迎风格式^[95], 目前该种格式被广泛地应用于有限元方法的计算。本文简单介绍 SUPG 格式的构建方法。

对于偏微分方程

$$Lu = f \quad (5)$$

式中 L 为微分算子。假定 u 的近似函数为

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{l=1}^N \Phi_l(\mathbf{x})u_l \quad (6)$$

那么方程(6)在计算区域 Ω 中的弱形式为

$$\int_{\Omega} v^* (Lu^h - f) d\Omega = 0 \quad (7)$$

对于 Bubnov-Galerkin 方法, 它的检验函数 $v^* = \Phi$, 而对于 Petrov-Galerkin 方法其 $v^* \neq \Phi$, 本文将式(7)中的检验函数作如下替换:

$$v^* = v + \tau L_{adv} v \quad (8)$$

式中: $L_{adv} = u_j \partial(\cdot)/\partial x_j$ 为对流项的微分算子, v 为检验函数, τ 为稳定性参数, 它的简化计算方法^[95]为

$$\tau = [D/(2\|u\|)](\coth(Pe/2) - 2/Pe) \quad (9)$$

式中 D 为节点间距。

式(8)即为 SUPG 格式的处理方法。这样修改后的检验函数形状发生了很大的变化。图 5 给出了修改过的检验函数的值与原检验函数值的差别。图中 A 为所计算的节点。一般的 Galerkin 方法中的检验函数在 A 点的值最大, 一般为 1, 其他点为零; 而 SUPG 方法则在迎风方向的值变大, 背风方向的值变小, 最大值大于 1。

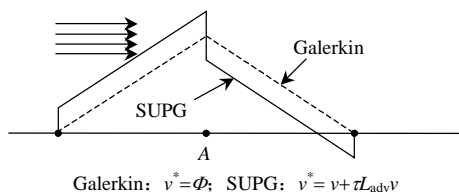


图 5 Galerkin 方法与 SUPG 方法的检验函数的差别
Fig. 5 Differences of test function between Galerkin and SUPG method

3 结论

无网格方法是近二十年来才发展起来的一类

新数值计算方法。从文中可以看出无网格方法在流体流动和对流传热问题的数值求解方面还不成熟, 有很多地方需要提高:

1) 无网格方法的数值积分是其难点之一, 这是因为无网格方法的形函数多为复杂的有理函数, 不像有限元方法是一个简单的多项式, 高斯积分方法能很好应用于有限元方法。

2) 无网格方法需要大量的计算资源, 一般它的计算量是有限容积或有限元方法的计算量的几十倍以上。

3) 无网格方法在对流项和压力项处理方面还需要进一步的研究, 发展一些高精度的格式和能使计算稳定的压力项的处理方法是当前急需解决的问题之一。

4) 对一些复杂流动问题的计算缺乏深入的研究, 目前文献的研究主要集中在二维问题, 对三维问题的研究很少。

参考文献

- [1] 刘更, 刘天祥, 谢琴. 无网格法及其应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2005: 48-62.
Liu Geng, Liu Tianxiang, Xie Qin. Meshless and its application [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2005: 48-62 (in Chinese).
- [2] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 1-13.
Zhang Xiong, Liu Yan, Meshless method[M]. Beijing: Tsinghua Press, 2004: 1-13 (in Chinese).
- [3] 张雄, 宋康祖, 陆明万. 无网格法研究进展及其应用[J]. 计算力学学报, 2003, 20(6): 730-742.
Zhang Xiong, Song Kangzu, Lu Mingwan. Research progress and application of meshless method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 20(6): 730-742(in Chinese).
- [4] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用[J]. 力学进展, 2009, 39(1): 1-36.
Zhang Xiong, Liu Yay, Ma Shang. Meshfree methods and their applications [J]. HAdvances in MechanicsH(China), 2009, 39(1): 1-36(in Chinese).
- [5] 陶文铨, 吴学红, 戴艳俊. 无网格数值求解方法[J]. 中国电机工程学报, 2010, 30(2): 1-10.
Tao Wenquan, Wu Xuehong, Dai Yanjun. Numerical solutions of meshless methods[J]. Proceedings of the CSEE, 2010, 30(2): 1-10 (in Chinese).
- [6] Zerroukat M, Power H, Chen C S. A numerical method for heat transfer problems using collocation and radial basis functions [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 42(7): 1263-1278.
- [7] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229-256.
- [8] Cleary P W, Monaghan J J. Conduction modeling using smoothed particle hydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 148(1): 227-264.

- [9] Chen J K, Beraun J E, Carney T C. A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(2): 231-252.
- [10] Yagawa G, Furukawa T. Recent developments of free mesh method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47(8): 1419-1433.
- [11] Singh I V, Sandeep K, Prakash R. Heat transfer analysis of two-dimensional fins using meshless element-free Galerkin method [J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 2003, 44(1): 73-84.
- [12] Singh I V, Sandeep K, Prakash R. The element free galerkin method in three-dimensional steady state heat conduction[J]. *International Journal of Computational Engineering Science*, 2002, 3(3): 291-303.
- [13] Singh I V, Prakash R. The numerical solution of three-dimensional transient heat conduction problems using element free Galerkin method[J]. *International Journal for Heat and Technology*, 2003, 21(2): 73-80.
- [14] Singh I V. A numerical solution of composite heat transfer problems using meshless method[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004, 47(10-11): 2123-2138.
- [15] Singh I V, Jain P K. Parallel EFG algorithm for heat transfer problems [J]. *Advances in Engineering Software*, 2005, 36(8): 554-560.
- [16] Singh A, Singh I V, Prakash R. Numerical solution of temperature-dependent thermal conductivity problems using a meshless method [J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 2006, 50(2): 125-145.
- [17] Sladek J, Sladek V, Zhang C. Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method[J]. *Computational Materials Science*, 2003, 28(3-4): 494-504.
- [18] Sladek J, Sladek V, Atluri S N. Meshless local Petrov-Galerkin method for heat conduction problem in an anisotropic medium [J]. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2004, 6(3): 309-318.
- [19] Sladek J, Sladek V, Hon Y C. Inverse heat conduction problems by meshless local Petrov-Galerkin method[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2006, 30(8): 650-661.
- [20] Sladek J, Sladek V, Hellmich C. Heat conduction analysis of 3-D axisymmetric and anisotropic FGM bodies by meshless local Petrov-Galerkin method[J]. *Computational Mechanics*, 2007, 39(3): 323-333.
- [21] 刘岩, 杨海天. 基于时域精细算法的 EFG/FE-EFG 方法求解热传导问题[J]. *应用基础与工程科学学报*, 2002, 10(3): 307-317.
Liu Yan, Yang Haitian. A combined approach of EFG/FE-EFG methods and precise algorithm in time domain solving heat conduction problems[J]. *Journal of Basic Science and Engineering*, 2002, 10(3): 307-317(in Chinese).
- [22] Liu Y, Zhang X, Liu M W. A meshless method based on least-squares approach for steady-and unsteady state heat conduction problems [J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 2005, 47(3): 257-275.
- [23] Divo E, Kassab A J. A meshless method for conjugate heat transfer problems[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2005, 29(2): 136-149.
- [24] Qian L F, Batra R C. Three-Dimensional transient heat conduction in a functionally graded thick plate with a higher-order plate theory and a meshless local Petrov-Galerkin method[J]. *Computational Mechanics*, 2005, 35(3): 214-226.
- [25] 范悦宏. 无网格法在数值传热学中的应用研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2005.
Fan Yuehong. A study of meshless method in numerical heat transfer [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2005(in Chinese).
- [26] 李庆华, 陈莘莘. 用加权最小二乘无网格法求解稳态热传导问题 [J]. *株洲工学院学报*, 2005, 19(4): 71-73.
Li Qinghua, Chen Shenshen. Meshless weighted least-square method for stable heat conduction problems[J]. *Journal of Zhuzhou Institute of Technology*, 2005, 19(4): 71-73(in Chinese).
- [27] 李庆华, 陈莘莘, 熊勇刚. 稳态热传导问题的局部 Petrov-Galerkin 法[J]. *株洲工学院学报*, 2006, 20(2): 22-24.
Li Qinghua, Chen Shenshen, Xiong Yonggang. A local Petrov-Galerkin method for stable heat conduction problems[J]. *Journal of Zhuzhou Institute of Technology*, 2006, 20(2): 22-24.
- [28] 贺光宗, 任传波, 赵华. 二维稳态热传导问题的修正变分原理及其数值算法[J]. *山东理工大学学报*, 2006, 20(1): 50-53.
He Guangzong, Ren Chuanbo, Zhao Hua. The modified variation principle and the numerical algorithm of steady 2-D heat conduction problem [J]. *Journal of Shandong University of Technology(Science and Technology)*, 2006, 20(1): 50-53(in Chinese).
- [29] 张雷, 黄天佑, 沈厚发, 等. 配点型无网格法及其迭代求解在导热微分方程中的应用[J]. *机械工程学报*, 2006, 42(增刊): 78-83.
Zhang Lei, Huang Tianyou, Shen Houfa, et al. Collocation meshless and iteration method for solving heat conduction differential equations [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(s1): 78-83(in Chinese).
- [30] 高志华, 张明义, 刘志强, 等. 相变温度场中无网格伽辽金法的应用[J]. *计算物理*, 2006, 23(5): 545-550.
Gao Zhihua, Zhang Mingyi, Liu Zhiqiang, et al. A meshless method for nonlinear transient field with phase change[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2006, 23(5): 545-550(in Chinese).
- [31] Ching H K, Yen S C. Transient thermoelastic deformations of 2-D functionally graded beams under nonuniformly convective heat supply[J]. *Composite Structures*, 2006, 73(4): 381-393.
- [32] Wang H, Qin Q H, Kang Y L. A meshless model for transient heat conduction in functionally graded materials[J]. *Computational Mechanics*, 2006, 38(1): 51-60.
- [33] Sada H, Dubus N, Gbahoue L, et al. On the solution of heterogeneous heat conduction problems by a diffuse approximation meshless method[J]. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 2006, 50(6): 491-498.
- [34] 王虎奇, 陈莘莘, 王晓峰, 等. 瞬态热传导问题的无网格局部 Petrov-Galerkin 法[J]. *桂林工学院学报*, 2007, 27(2): 294-297.
Wang Huqi, Chen Shenshen, Wang Xiaofeng, et al. A meshless local Petrov-Galerkin method for transient heat conduction problems [J]. *Journal of Guilin University of Technology*, 2007, 27(2): 294-297(in Chinese).
- [35] 程荣军, 程玉民. 带源参数的热传导反问题的无网格方法[J]. *物理学报*, 2007, 56(10): 5569-5574.
Cheng Yongjun, Cheng Yumin. The meshless method for solving the inverse heat conduction problem with a source parameter[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, 56(10): 5569-5574(in Chinese).
- [36] 程荣军, 程玉民. 带源参数的二维热传导反问题的无网格方法 [J]. *力学学报*, 2007, 39(6): 843-847.
Cheng Yongjun, Cheng Yumin. The meshless method for a two-dimensional inverse heat conduction problem with a source parameter[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(6): 843-847(in Chinese).

- [37] 李庆华, 陈莘莘, 欧阳琴, 等. 自然邻近无网格 Petrov-Galerkin 法求解稳态热传导问题[J]. 湖南工业大学学报, 2007, 21(6): 36-39.
Li Qinghua, Chen Shenshen, Ouyang Qin, et al. On meshless natural neighbour Petrov-Galerkin method for stable heat conduction problem [J]. Journal of Hunan University of Technology, 2007, 21(6): 36-39(in Chinese).
- [38] Liu L H, Tan J Y, Li B X. Meshless approach for coupled radiative and conductive heat transfer in one-dimensional graded index medium[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2006, 101(2): 237-248.
- [39] Tan J Y, Liu L H, Li B X. Least-squares collocation meshless approach for coupled radiative and conductive heat transfer [J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2006, 49(2): 179-195.
- [40] Liu L H, Tan J Y. Meshless local Petrov-Galerkin approach for coupled radiative and conductive heat transfer[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2007, 46(7): 672-681.
- [41] Liu L H, Tan J Y. Least-squares collocation meshless approach for radiative heat transfer in absorbing and scattering media[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2007, 103(3): 545-557.
- [42] Tan J Y, Liu L H, Li B X. Least-squares collocation meshless approach for transient radiative transfer[J]. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 2006, 20(4): 912-918.
- [43] Tan J Y, Zhao J M, Liu L H. Meshless method for geometry boundary identification problem of heat conduction[J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2009, 55(2): 135-154.
- [44] Tan J Y, Zhao J M, Liu L H, et al. Comparative study on accuracy and solution cost of the first/second-order radiative transfer equations using the meshless method[J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2009, 55(4): 324-337.
- [45] Tan J Y, Liu L H, Li B X. Least-squares radial point interpolation collocation meshless method for radiative heat transfer[J]. Journal of Heat Transfer, 2009, 129(5): 669-673.
- [46] Wu X H, Shen S P, Tao W Q. Meshless local Petrov-Galerkin collocation method for two-dimensional heat conduction problems [J]. CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2007, 22(1): 65-76.
- [47] Wu X H, Tao W Q. Meshless method based on the local weak-forms for steady state heat conduction problems[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2008, 51(11-12): 3103-3112.
- [48] 吴学红. 无网格局部 Petrov-Galerkin(MLPG)方法及其在传热与流动中的应用[D]. 西安: 西安交通大学, 2009.
Wu Xuehong. The meshless local Petrov-Galerkin(MLPG) method and its applications in heat transfer and fluid flow problems [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2009(in Chinese).
- [49] Liu G R, Liu M B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2003: 54-81.
- [50] Monaghan J J. Why particle methods work[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1982, 3(4): 422-433.
- [51] Monaghan J J. Particle methods for hydrodynamics[J]. Computer Physics Reports, 1985, 3(2): 71-124.
- [52] Monaghan J J. An introduction to SPH[J]. Computer Physics Communications, 1988, 48(1): 89-96.
- [53] Monaghan J J. Smooth particle hydrodynamics [J]. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 1992(30): 543-547.
- [54] Monaghan J J. Simulating free surface flow with SPH[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 110(2): 399-406.
- [55] Monaghan J J, Gingold R A. Shock simulation by the particle method SPH[J]. Journal of Computational Physics, 1983, 52(2): 374-389.
- [56] Monaghan J J, Kocharyan A. SPH simulation of multiphase flow [J]. Computer Physics Communications, 1995, 87(1-2): 225-235.
- [57] Morris J P. Analysis of smoothed particle hydrodynamics with applications[D]: Melbourne, Australia: Monash University, 1996.
- [58] Morris J P, Fox P J, Zhu Y. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 136(1): 214-226.
- [59] Morris J P, Zhu Y, Fox P J. Parallel simulation of pore-scale flow through porous media [J]. Computers and Geotechnics, 1999, 25(4): 227-246.
- [60] Sadat H, Prax C. Application of the diffuse approximation for solving fluid flow and heat transfer problems[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1996, 39(1): 214-218.
- [61] Sadat H, Couturier S. Performance and accuracy of a meshless method for laminar natural convection [J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: Fundamentals, 2000, 37(4): 455-467.
- [62] Sophy T, Sadat H, Prax C. A meshless formulation for three-dimensional laminar natural convection[J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2002, 41(5): 433-445.
- [63] Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, et al. A finite point method in computational mechanics: Applications to convective transport and fluid flow[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(22): 3839-3866.
- [64] Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, et al. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1-4): 315-346.
- [65] Oñate E. Derivation of stabilized equations for advective-diffusive transport and fluid flow problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 151(1-2): 233-267.
- [66] Lohner R, Sacco C, Oñate E, et al. A finite point method for compressible flow[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(8): 1765-1779.
- [67] Shirazaki M, Yagawa G. Large-scale parallel flow analysis based on free mesh method: a virtually meshless method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, 174(3-4): 419-431.
- [68] Yagawa G, Shirazaki M. Parallel computing for incompressible flow using a nodal-based method[J]. Computational Mechanics, 1999, 23(2): 209-217.
- [69] Liu W K, Jun S, Sihling D T, et al. Multiresolution reproducing kernel particle methods for computational fluid dynamics[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1997, 24(12): 1391-1415.
- [70] Gunther F, Liu W K, Diachin D, et al. Multi-scale meshfree parallel computations for viscous, compressible flows[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 190(3-4): 279-303.
- [71] Gunther F C. A meshfree formulation for the numerical solution of the viscous, compressible Navier-Stokes equations [D]. Chicago: Northwestern University, 1998.
- [72] Lin H. Meshless local Petrov-Galerkin(MLPG) method for convective-diffusive transport and fluid flows[D]. Los Angeles: University of California, 2000.
- [73] Lin H, Atluri S N. Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) method for convection-diffusion problems[J]. CMES: Computer Modeling in

- Engineering & Sciences, 2000, 1(2): 45-60.
- [74] Lin H, Atluri S N. The meshless local Petro-Galerkin(MLPG) method for solving incompressible Navier-Stokes equation[J]. CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2001, 2(2): 117-142.
- [75] Shu C, Ding H, Yeo K S. Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(7-8): 941-954.
- [76] Cheng M, Liu G R. A novel finite point method for flow simulation [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 39(12): 1161-1178.
- [77] Liu G R, Wu Y L, Ding H. Meshfree weak-strong(MWS) form method and its application to incompressible flow problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2004, 46(10): 1025-1047.
- [78] Arefmanesh A, Najafi M, Abdi H. A meshless local Petrov-Galerkin method for fluid dynamics and heat transfer application[J]. Journal of fluids Engineering, 2005, 127(4): 647-655.
- [79] Arefmanesh A, Najafi M, Abdi H. Meshless local Petrov-Galerkin method with unity test function for non-isothermal fluid flow [J]. CMES: Computer Modeling in Engineering & Science, 2008, 25(1): 9-22.
- [80] 仇轶, 由长福, 祁海鹰, 等. 粘性不可压流场数值模拟的无网格方法[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2004, 44(2): 282-285.
Qiu Yi, You Changfu, Qi Haiying, et al. Meshless method for the simulation of viscous, incompressible flows[J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2004, 44(2): 282-285(in Chinese).
- [81] 仇轶, 由长福, 祁海鹰, 等. 用无网格法求解不同 Re 下圆柱绕流问题[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2005, 45(2): 220-223.
Qiu Yi, You Changfu, Qi Haiying, et al. Numerical simulation of flow around a cylinder for different Re using a meshless method[J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2005, 45(2): 220-223(in Chinese).
- [82] 仇轶, 由长福, 祁海鹰, 等. 用无网格伽辽金法模拟流场中的颗粒运动[J]. 化工学报, 2006, 57(6): 1323-1328.
Qiu Yi, You Changfu, Qi Haiying, et al. Direct numerical simulation of gas-particle flows using EFG method[J]. Journal of Chemical Industry and Engineering, 2006, 57(6): 1323-1328(in Chinese).
- [83] 仇轶, 由长福, 祁海鹰, 等. 无网格方法中的背景积分方案及单颗粒下降过程的数值模拟[J]. 计算物理, 2006, 23(5): 525-529.
Qiu Yi, You Changfu, Qi Haiying, et al. On the background integral in a meshless method and simulation of one particle dropping [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2006, 23(5): 525-529(in Chinese).
- [84] 段日强, 姜胜耀, 张佑杰, 等. 用无网格粒子法直接模拟多相多组分界面流[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2005, 45(6): 835-838.
Duan Riqiang, Jiang Shengyao, Zhang Youjie, et al. Direct simulation of interfacial flows for multi-phase and multi-component mixtures using the particle method[J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2005, 45(6): 835-838(in Chinese).
- [85] 史宝军, 袁明武, 宋世军. 流体力学问题基于核重构思想的最小二乘配点法[J]. 工程力学, 2006, 23(4): 17-21.
Shi Baojun, Yuan Mingwu, Song Shijun. Least-square point collocated meshless method based on kernel reproducing for hydrodynamic problems[J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(4): 17-21(in Chinese).
- [86] 张小华. 无网格方法在计算流体力学中的应用研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2006.
Zhang Xiaohua. Applications of meshless method in CFD[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2006(in Chinese).
- [87] 胡晓燕. 计算流体力学中的 SPH 和 MLSPH 方法研究[D]. 北京: 中国工程物理研究院, 2006.
Hu Xiaoyan. Investigation of SPH and MLSPH method in CFD [D]. Beijing: China Academy of Engineering Physics, 2006(in Chinese).
- [88] 张运新. 无网格径向基函数方法与不可压缩流体计算[D]. 上海: 复旦大学, 2006.
Zhang Yunxin. RBFs meshless method and computational incompressible fluid flow[D]. Shanghai: Fudan University, 2006(in Chinese).
- [89] 谢永慧, 汪勇, 张荻. 水滴高速撞击下汽轮机叶片的动力响应[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(17): 76-81.
Xie Yonghui, Wang Yong, Zhang Di. Study on dynamic response of steam turbine blade with high speed water droplet impact [J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(17): 76-81(in Chinese).
- [90] Wu X H, Shen S P, Tao W Q. A stabilized MLPG method for incompressible fluid flow simulation[M]//Yao Z H, Soric J, Alturi S N. Recent Studies in Meshless Methods. Encino USA: Technology Science Press, 2009: 153-162.
- [91] Oñate E, Idelsohn S. A mesh-free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems[J]. Computational Mechanics, 1998, 21(4-5): 283-292.
- [92] Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C. Finite point methods in computational mechanics[R]. CIMNE, Barcelona, 1995.
- [93] Zienkiewicz O C, Taylor R L. The finite element method[M]. Fifth Edition. Volume 3. Fluid Dynamics Barcelona: Butterworth-Heinemann, 2000: 16-19.
- [94] Atluri S N. The meshless local Petrov-Galerkin(MLPG) method for domain & boundary discretizations[M]. Encino USA: Tech Science Press, 2004: 453-454.
- [95] Brooks A N, Hughes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1982, 32(1-3): 199-259.



陶文铨

收稿日期: 2009-11-19.

作者简介:

陶文铨(1939—), 男, 中国科学院院士, 博士生导师, 研究方向为传热与流动的先进数值计算方法及其应用; 强化传热的基本理论与工程应用; 电子元器件的冷却技术; 湍流模型及其工程应用; 小型低温制冷机制和冷系统性能的数值模拟; 高效换热器的优化设计与研发等, wqtao@mail.xjtu.edu.cn;

吴学红(1979—), 男, 博士, 讲师, 主要从事强化换热及数值模拟方面的研究, wuxh1212@163.com;

戴艳俊(1986—), 女, 浙江人, 博士研究生, 主要从事强化换热与高性能算法方面的研究工作, daiyanjun@stu.xjtu.edu.cn.

(责任编辑 王庆霞)