第 30 卷第 6 期　工 程 热 物 理 学 报　Vol.30, No.6
2009 年 6 月　JOURNAL OF ENGINEERING THERMOPHYSICS　Jun., 2009

建立低阶模型的 POD 方法

丁 鹏　陶文铨

(西安交通大学能源与动力工程学院，陕西 西安 710049)

摘 要　将分析湍流拟序结构中的最佳正交分解技术运用到流动和传热问题中，并使用最佳正交分解技术建立了物理问题的低阶模型。通过对样本矩阵实施最佳正交分解得到一组特征函数。将控制方程采用 Galerkin 投影的方法投影到基函数所代表的空间上，从而得到原物理问题的低阶模型。计算结果表明，通过 POD 方法得到的低阶模型可以非常准确，并且快速地得到问题的解。

关键词　低阶模型; POD; 最佳正交分解

中图分类号: TL421+.2　**文献标识码**: A　**文章编号**: 0253-231X(2009)06-1019-03

REDUCED ORDER MODELING WITH THE PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION

DING Peng　TAO Wen-Quan

(*School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

Abstract　The POD technique is applied to a set of numerical simulation results to obtain the eigenfunctions that represent the dynamics of the physical problem. The function space is limited to the smallest linear subspace when employing these eigenfunctions as basis functions. The reduced order model is was obtained by projecting the governing equations onto these eigenfunctions. The present algorithm is demonstrated to produce very accurate temperature fields when compared with the exact numerical results, and it is more than 100 times faster than the FVM.

Key words　reduced order modeling; POD; proper orthogonal decomposition

0 引 言

工程中的许多传热和流动问题都可以用一组偏微分方程来描述，我们通常以数值方法来获得问题的解。而对于工业生产中的许多复杂问题，要想得到这些问题的数值解需要很大的计算资源，因此难以将数值计算的结果用于在线生产过程的控制与优化。为了开辟将流动与传热数值模拟结果用于实际生产过程在线控制的途径，需要寻找一种在一定条件下能迅速获得流动与传热问题物理场的数学方法。低阶模型是一种可以在短时间内获得物理问题的准确解的方法。本文将分析湍流拟序结构中的最佳正交分解 (Proper Orthogonal Decomposition)[1~3] 技术运用到低阶模型的建立中，并以一非稳态非线性导热问题为例说明了 POD 的具体实施过程以及低阶模型的建立方法。

1 POD 的理论基础

假设 $f(\vec{x},t_n)$ 为一已知物理场，$f(\vec{x},t_n)$ 可以通过数值方法得到并称之为一个样本。POD 的最终目的是得到一组最佳正交基 (POM) 从而将 $f(\vec{x},t_n)$ 表示为以下的级数形式:

$$f(\vec{x},t_n)=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k(t_n)\phi^k(\vec{x})$$

$$M\leqslant\infty,\ n=1,\ \cdots,\ N \tag{1}$$

求解基函数 $\varphi^k(\vec{x})$ 的过程等同于求解以下积分特征值问题 [1,2]

$$\int_\Omega \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\vec{x},t_n)f(\vec{x}',t_n)\phi\left(\vec{x}'\right)d\vec{x}'=\lambda\phi\left(\vec{x}'\right) \tag{2}$$

实际计算中 Hermit 核 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(\vec{x},t_n)f(\vec{x}',t_n)$ 的维数与数值求解的离散网格数相同，所以运用 Hilbert-Schmidt[2] 方法直接求解式 (2) 在一般计算资源下很难完成。本文采用了 Sirovich[3] 的“快照”(snapshot) 方法来求解以上积分特征值问题。Sirovich 方法将基

收稿日期: 2008-12-31; **修订日期**: 2009-05-09
基金项目: 国家自然科学基金重点项目 (No.50636050) 的资助。
作者简介: 丁 鹏 (1980-)，男，山东曲阜人，博士研究生，主要从事计算流体、强化换热方面的研究工作。

函数表示成为样本的线性叠加，从而将带求解问题的维数转变为了与样本个数相等，从而大大节省了计算资源。基函数具有正交的性质，即

$$(\phi_i,\phi_j)=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}\tag{3}$$

通过将控制方程 Galerkin 投影到基函数所处的空间上我们可以得到关于系数 $\alpha_k(t_n)$ 的方程，我们称之为低阶模型。

2 应用实例

现在我们要建立一非稳态导热问题的低阶模型，其控制方程为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]+S(t,x)\tag{4}$$

$$S(t,x)=f(t)\,n/2\cosh^2\left[n(x-x_o)\right]\tag{5}$$

式中，$S(t,x)$ 为一点热源，取 n=100，$x_0=0.25$。$\kappa(\theta)=1+0.01\theta$。其初始条件和边界条件为

$$\theta(x,0)=0.01,\ \ \theta(0,t)=0.0,\ \ \theta(1,t)=0.0\tag{6}$$

我们采用有限容积法离散上述控制方程，共使用了 100 个控制容积，离散的时间步长 $\Delta t=0.0005$。实施最佳正交分解的第一步是采集样本。我们在 $f(t)=20$ 时求解上述控制方程，共计算了 1520 个时间步，将每一个时间步时的温度分布作用为一个样本，这样我们共得到 1520 个系统样本。图 1 中给出了不同时刻时候的温度分布情况。通过对其进行最佳正交分解，共可得到 1520 个基函数。将这些基函数按照其相应的特征值从大到小的顺序进行排列。图 2 中给出了前 6 个基函数的型线分布。对比图 1 可以发现第一个基函数表示样本中最具代表性的结构，变化最为平缓。随后的基函数含有越来越多的震荡。

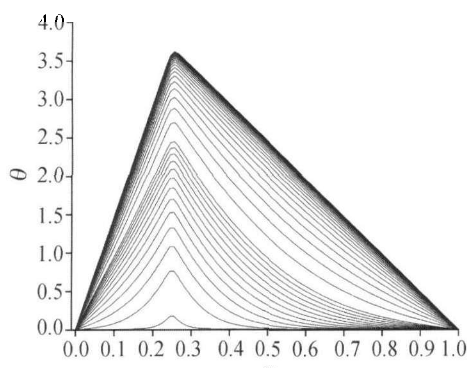

图 1 不同时刻的温度分布

Fig. 1 The temperature distribution at different time

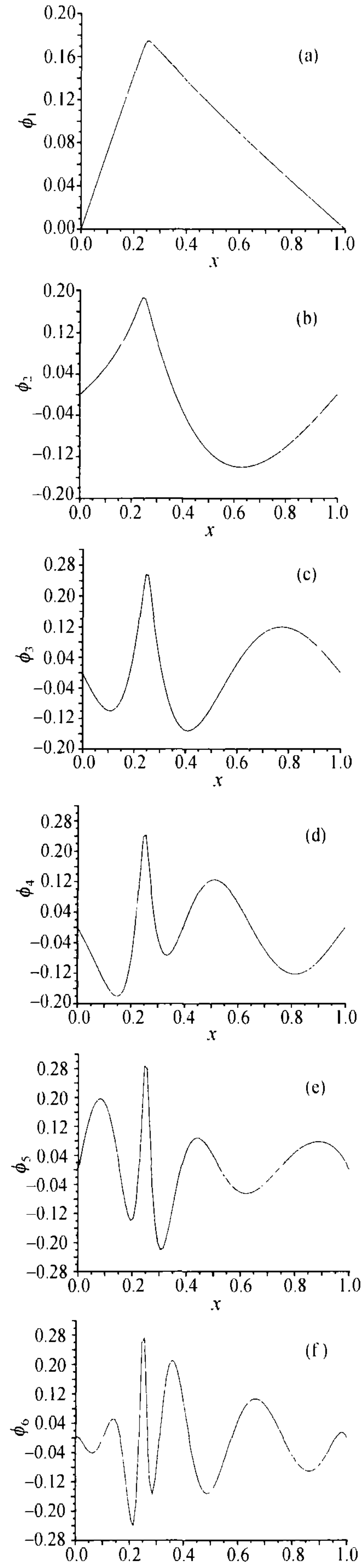

图 2 由正交分解得到的前 6 个基函数

Fig. 2 The first six eigenfunctions obtained from the POD

我们将温度场表示为

$$\theta(x,t)=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k(t_n)\phi_\theta^k(x)\quad M\leqslant N \tag{7}$$

将式 (6) 代入到式 (3) 中，利用基函数的正交性，采用 Galerkin 投影方法将原来的控制方程转换为以下常微分方程

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=-\sum_{k=1}^{M}H_{ik}\alpha_k-\lambda\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}Q_{ikl}\alpha_k\alpha_l+F_i$$

$$i=1,2,\cdots,M \tag{8}$$

$$H_{ik}=\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x},\frac{\partial\phi_k}{\partial x}\right) \tag{9}$$

$$Q_{ikl}=\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x},\frac{\partial\phi_k}{\partial x}\right)\phi_l \tag{10}$$

$$F_i=\left[\phi_i,S\left(t,x\right)\right] \tag{11}$$

其相应的初始条件为

$$\alpha_i\left(t_0\right)=\left[\theta\left(x,0\right),\phi_i\right] \tag{12}$$

3 模型精度检验

为了检验低阶模型的精度，我们设计了 2 个热源函数，其变换型线在图 3 中给出。注意这里的 2 个热源函数变化型线与设计工况时非常不同。图 4 中给出了低阶模型的计算结果，采用有限容积法的计算结果也在图 4 中给出。我们可以观察到低阶模型是与有限容积法得到的结果吻合是非常好的。

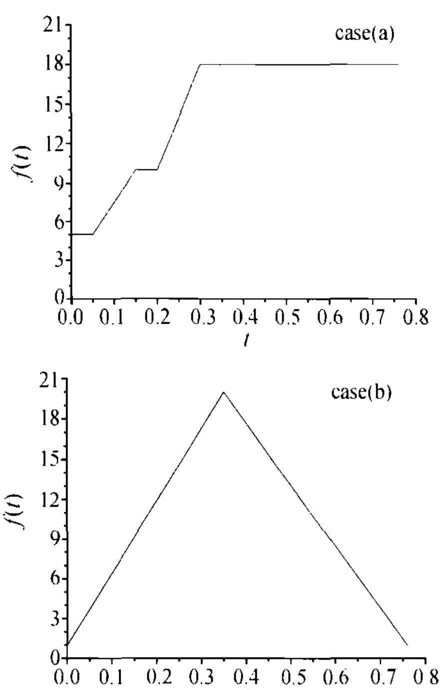

图 3 用以检验低阶模型精度的热源函数

Fig. 3 The designed heat source functions

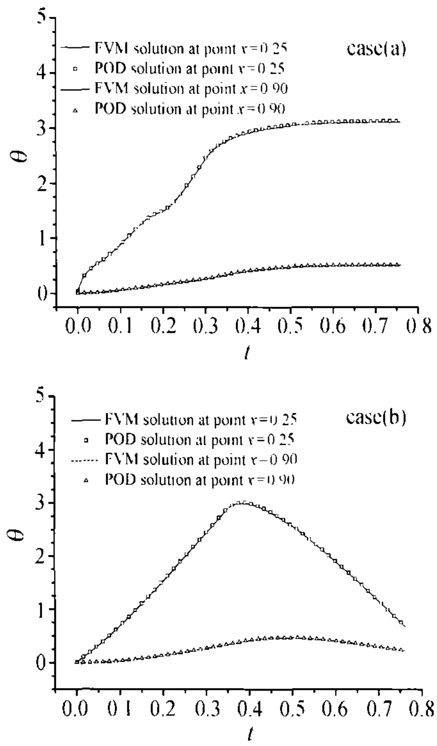

图 4 FVM 和低阶模型结果的比较

Fig. 4 The comparison between the results of FVM and ROM

最后我们来比较计算时间，使用有限容积法需要使用 8.63 s，而使低阶模型我们仅用 0.32 s 的时间。

4 结　论

本文以最佳正交分解 (POD) 为基础，建立了一非稳态导热问题的低阶模型。结果表明通过 POD 方法得到的低阶模型可以非常准确，并且快速地得到问题的解。

参 考 文 献

[1] Berkooz G, Holmes P, Lumley J L. The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows. Annual Review Fluid Mech., 1993, 25: 539–575

[2] Ding P, Wu X H, Tao WQ. A Fast and Efficient Method for Predicting Fluid Flow and Heat Transfer Problems. ASME Journal of Heat Transfer, 2008, 130: 1–16

[3] Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry. Cambridge Univ. Press, UK., Cambridge: Holmes P, Lumley J L, Berkooz G., 1996

[4] Sirovich L. Turbulence and the Dynamics of Coherent Structure Part I, II, III. Q. Appl. Math., 1987, XLV(3): 561–571