

不规则区域热传导问题无网格 Petrov-Galerkin 方法的数值模拟

吴学红¹ 李增耀¹ 申胜平² 陶文铨¹

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院多相流国家重点实验室, 陕西 西安 710049;
2. 西安交通大学航空航天学院强度与振动教育部重点实验室, 陕西 西安 710049)

摘要 无网格 Petrov-Galerkin(MLPG) 方法是一种真正的无网格方法, 它利用节点计算待求量的插值函数, 并利用高斯型求积公式在局部子域内进行数值积分。本文提出了一种有效的用于不规则区域的高斯型数值积分实施方法, 通过数值研究表明: 该方法能很好地处理不规则区域积分, 其计算结果与基准解和 FLUENT 的计算结果吻合很好。

关键词 无网格方法; 不规则区域; 数值积分

中图分类号: TK124 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-231X(2009)08-1350-03

NUMERICAL SIMULATION OF HEAT CONDUCTION PROBLEMS ON IRREGULAR DOMAIN BY USING MLPG METHOD

WU Xue-Hong¹ LI Zeng-Yao¹ SHEN Sheng-Ping² TAO Wen-Quan¹

(1. The State Key Lab of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049 China;
2. MOE Key Lab for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract Meshless Local Petrov-Galerkin method (MLPG) is a truly meshless method, in which nodes are only used to construct the interpolation function and Gauss integration is applied on each local sub-domain. In this paper, numerical integration method of irregular domain is proposed. The numerical results show that the present method can deal with numerical integration of irregular domain efficiently and are in agreement with those of analytical solutions and the numerical results from FLUENT.

Key words meshless method; irregular domain; numerical integration

0 前 言

MLPG 方法^[1,2]是近十年发展起来的一种新的无网格方法。它在计算区域中布置一些离散节点, 并利用这些节点构造插值函数, 在局部子域进行数值积分, 进而形成待求物理量的刚度方程。关于 MLPG 方法的详细计算方法见文献 [1],[2]。

无网格方法数值积分是无网格方法的一个计算难点^[3], 因为: 第一, 无网格方法没有网格, 不像有限元方法很容易在网格内进行数值积分; 第二, 无网格形函数多为复杂的有理函数, 不像有限元方法的形函数是一个简单的多项式, 一般的高斯-勒让德积分方法就能很好地应用于有限元方法。因此无网格方法在计算时需要布置大量高斯积分点去提高计算的精度, 因此其计算工作量也大幅增加。目前在无网格方法中常用的积分方法有直接高斯型

数值积分^[3]、背景网格高斯数值积分^[4]、有限球数值积分^[5]等方法, 但在 MLPG 方法的计算中都直接用高斯型数值积分。

众所周知, 高斯型数值积分是在规则 ($-1 \leq \zeta \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$) 区域上进行积分, 而工程中很多问题的计算区域是极不规则的。因此本文提出了不规则区域数值积分的实施方法, 并通过实例验证了该种处理方法的有效性与计算精度。

1 不规则区域的积分处理

图 1 给出了一个斜边界与一个不规则边界交接处的积分转换图。图中 r 是积分子域的半径, 它需要把圆形子域转化为规则的高斯积分域^[6], 也可以把高斯积分的点与权转换成极坐标形式进行积分。如

收稿日期: 2008-12-31; 修订日期: 2009-06-30

基金项目: 国家自然科学基金重点项目资助 (No.50636050)

作者简介: 吴学红 (1979-), 男, 河南固始人, 博士, 主要从事强化传热、无网格方法及先进数值方法方面的研究。

果把左边图中的阴影部分转换成单位圆, 这样就可以进行高斯积分。积分子域的支持域半径 r 最大取为节点 A 与 C 和节点 A 与 B 之间距离的最小值 (即 $r \leq \min(D_{AB}, D_{AC})$), 这样选取时积分域很容易转换为单位圆。

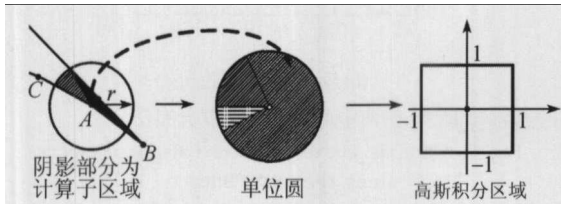


图 1 两个边界相交处的积分处理

Fig. 1 Integration implementation of intersecting two boundaries

假定 x_1 为积分子域 (如图 2 中阴影部分) 边界上的任意一点, x_0 为节点, x 为阴影区域中的任意一点, 线 AB 与线 AC 之间的夹角为 θ , 则其半径方向的转换为:

$$\zeta = \frac{x - x_0}{|x_1 - x_0|} \quad (1)$$

其夹角只要扩大 $2\pi/\theta$ 倍就可把阴影部分转换为单位圆; 但是如果积分子域的半径 $r \geq \max(D_{AB}, D_{AC})$, 如图中虚线圆弧与四条折线所形成的不规则扇形区域去转换为单位圆, 情况就复杂得多。由此可见, 上述这种简单的处理方法可以使无网格方法数值积分的计算变得简单。

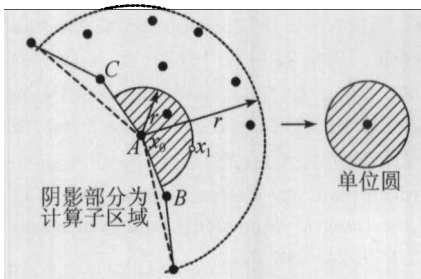


图 2 不规则区域边界相交处的积分处理

Fig. 2 Integration implementation of intersecting two boundaries of irregular domain

2 应用计算与结果分析

采用上述不规则区域积分的处理方法, 作者编制了实施 Petrov-Galerkin 无网格方法的计算导热问题的程序。首先用一个具有分析解的例子来验证程序的有效性和计算精度, 然后应用所开发的程序计算一个工程中的不规则区域的热传导问题, 并把它计算结果与有限容积法 (采用 FLUENT6.3 完成) 的计算结果进行比较。

2.1 程序验证

二维正方形物体的导热问题。上边界给定温度为 $T = 1$, 其它边界温度均为 $T = 0$ 。无内热源, 导热系数 $\lambda = 1$ 。对于此问题, 文献 [7] 给出该问题的精确解的表达式:

$$T(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin(n\pi x) \frac{\sinh(n\pi y)}{\sin(n\pi)} \quad (2)$$

在进行 MLPG 计算时, 在求解域中均匀地布置了 11×11 个节点, 支持域半径 r 取节点间距的 1.5 倍, 在每一个计算子域中布置 4×4 高斯点。有限容积法中采用中心差分对控制方程进行离散。公式 (2) 中的 $n = 20$ 。图 3 给出了本文的计算结果与分析解和有限容积法 (FVM) 的结果在上下中心线 (UD) 与左右中心线 (LR) 上的比较, 从计算的结果可以看出, 两种数值计算方法所得到的结果与精确解吻合很好。

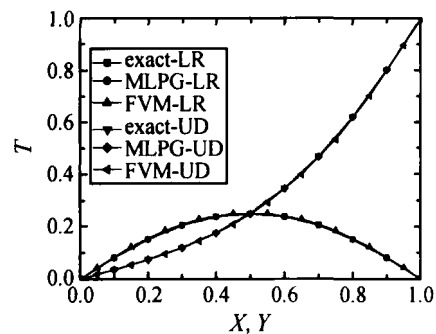


图 3 沿中心线的计算结果比较

Fig. 3 Comparison of temperature distributions along the centerlines

2.2 石油运输管导热泥中的热传导问题

在石油、化工等工程中, 为了输送沥青等具有高黏度的物质, 常常采用蒸汽加热方式使沥青保持在一定温度以上以降低其黏稠度。国内外近年来开发出一种具有较高导热系数的胶泥状物质, 称为导热泥。将它填充于蒸汽伴管与物料管之间 (图 4), 可望大大提高加热效率, 从而有可能取代套管蒸汽方式 [8]。在计算中选取图 4 中的阴影部分的一半作为计算区域。导热泥的热传导系数为 $\lambda = 10 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$, 两个管的外表面分别维持 150°C 和 100°C 。图 5 给出了 MLPG 方法的节点分布图与 FVM 的网格示意图, 为了比较的方便我们选取 MLPG 方法与 FVM 相同的节点配置。

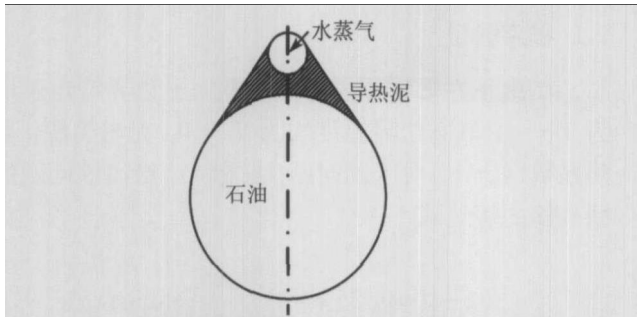


图4 物理模型与计算区域的选取
Fig. 4 Physical model and computational domain

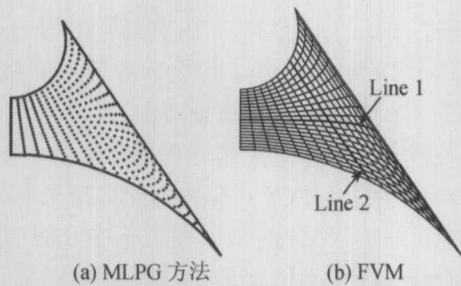


图5 MLPG的离散与FVM的离散网格示意图
Fig. 5 Node or mesh distribution of MLPG method and FVM

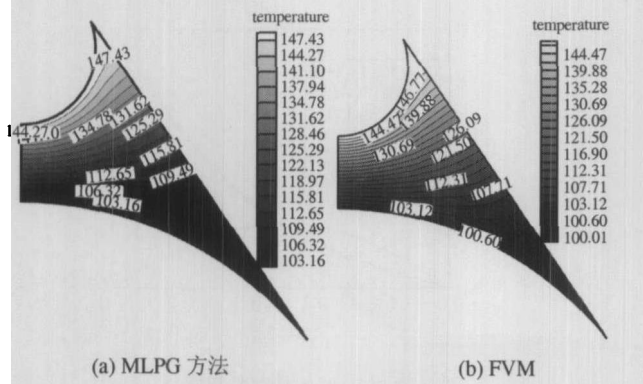
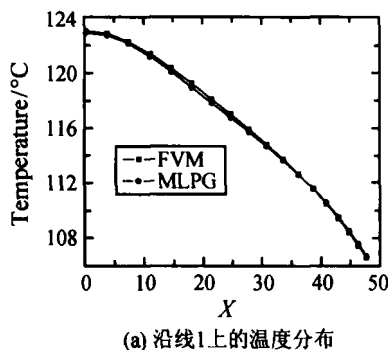
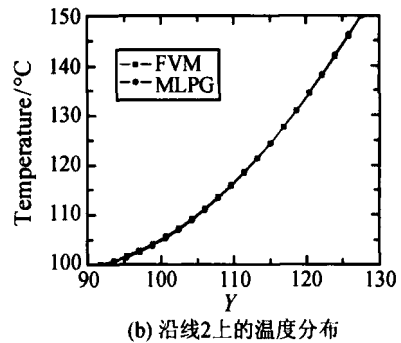


图6 温度场分布比较图
Fig. 6 Comparison of temperature fields

在 MLPG 方法与有限容积法计算时共布置 336(21×16) 个节点, 在 MLPG 方法的每一个计算子域中布置 6×6 高斯点. 局部子域的半径选取最小的节点间距, 这样可以满足对子域选取的要求. 图 6



(a) 沿线1上的温度分布



(b) 沿线2上的温度分布

图7 沿两中心线上的温度分布图
Fig. 7 Comparison temperature distributions along the centerlines

和图 7 分别给出了温度场分布图和沿线 1 与线 2(图 5) 的温度分布图, 从图中可以看出, MLPG 方法的计算结果与 FVM 的计算结果符合得很好.

3 结 论

本文针对不规则区域无网格局部 Petrov-Galerkin 方法提出了不规则区域积分子域的选取方法, 通过对具有分析解和工程导热问题的对比计算, 验证了 MLPG 方法的计算结果与分析解和有限容积法的计算结果之间的一致性, 说明所提出的不规则区域积分子域的选取方法用于 MLPG 方法时具有较高的计算精度, 也显示了这种选取积分子域的方法能很好地处理不规则区域问题.

参 考 文 献

- [1] Atluri SN, Zhu T. A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics. *Comput. Mech.*, 1998, 22: 117-127
- [2] Atluri SN, Shen SP. *The Meshless Local Petrov-Galerkin Method*. Encino (USA): Tech Science Press, 2002
- [3] Atluri SN, Kim H, Cho JY. A Critical Assessment of the Truly Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) and Local Boundary Integral Equation(LBIE) Methods. *Comput. Mech.*, 1999, 24: 348-372
- [4] Dolbow J, Belytschko T. Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods. *Comput. Mech.*, 1999, 33: 219-230
- [5] De S, Bathe KJ. *The Method of Finite Spheres*. *Computational Mechanics*, 2000, 25: 329-345
- [6] Liu GR. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. Boca Raton (USA): CRC Press, 2003
- [7] Necati-Özsisik M. *Heat Conduction*. New York: Wiley, 1980
- [8] 成昌锐, 胡延东, 赵长颖, 等. 导热泥强化传热作用的数值模拟. *工程热物理论*, 2001, 22(1): 101-103
CHEN CR, Hu YD, Zhao CY, et al. Numerical Study on Heat Transfer Characteristic of Conduction Mud. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2001, 22(1): 101-103