

一种求解对流扩散问题的高精度无网格方法

吴学红 李增耀 马良栋 陶文铨

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 陕西 西安 710049)

摘要 无网格局部 Petrov-Galerkin 方法是近十年发展起来的一种新的数值计算方法, 该方法在计算区域内布置一些离散的节点, 并利用这些节点构建插值函数。本文以 Smith-Hutton 问题为例, 把该方法的计算结果与有限容积法高阶格式的计算结果进行比较。研究表明: 该方法是一种高精度的数值计算方法, 能有效地计算高 Pe 数的流动问题。

关键词 无网格法; Petro-Galerkin 方法; 数值模拟

中图分类号: TK124 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-231X(2008)09-1561-03

A HIGHLY ACCURATE MESHLESS METHOD FOR CONVECTION-DIFFUSION PROBLEMS

WU Xue-Hong LI Zeng-Yao MA Liang-Dong TAO Wen-Quan

(The State Key Lab of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract Meshless local Petrov-Galerkin method (MLPG) as a new computational method has been developed in recent years, which disposes a group of scatter points in the computational domain and construct the interpolation function through these nodes. The Smith-Hutton problem was selected as the demonstrated test problem and solved by the MLPG. The results of the MLPG method were compared with the results of finite volume method with high order scheme. The results indicate that the MLPG method is a highly accurate numerical method and can deal effectively with high Pe number fluid flow problems.

Key words meshless method; Petro-Galerkin method; numerical simulation

0 前言

近十几年来, 有限元法与有限容积法成为解决工程问题的主要计算方法。在应用这些方法的过程中, 遇到的困难之一是对复杂几何形状的网格剖分, 网格质量的好坏直接影响到求解的精度, 网格的生成又花费许多时间。鉴于此问题, 近些年来国内外许多学者提出了无网格方法^[1~3]。

最初, 无网格法主要用来求解力学问题。最近几年, 一些作者开始用它来求解传热与流动问题, 但主要应用光滑粒子动力学方法^[4]和无网格 Galerkin 方法^[5~7]; 无网格 Galerkin 方法需要用背景网格进行积分, 因此它不是一种真正的无网格法; 而光滑粒子动力学方法则对于非均匀布置的节点不满足一致性条件, 且在边界处的精度较低。1998 年 Atluri 和 Zhu^[8]提出了无网格局部 Petrov-Galerkin 方法, 它用移动最小二乘法建立场函数的近似, 在局部子域上进行积分, 是一种真正的无网格法。本文以 Smith-

Hutton 问题为例, 研究在不同的 Pe 数情况下 MLPG 方法的有效性, 并把它与有限容积的高阶格式进行比较, 说明它是一种高精度的计算方法。

1 Smith-Hutton 问题

Smith 与 Hutton^[9,10] 在 1982 年提出如下对流 - 扩散问题: 已知矩形区域 ($-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) 上一个二维流场:

$$u = 2y(1 - x^2), v = -2x(1 - y^2)$$

在 $-1 \leq x \leq 0, y = 0: T_{in}(x) = 1 + \tanh[\alpha(1 + 2x)]$

在 $0 \leq x \leq 1, y = 0: \frac{\partial T}{\partial y} = q = 0$

其它边界上: $T = 0$ 。

试确定在出口区域 (在 $0 \leq x \leq 1, y = 0$) T 的分布。其中 α 称为陡度系数, 其值越大, 进口阶梯形温度分布越陡。其流场与进口温度场分布如图 1 所示。

收稿日期: 2008-01-10; 修订日期: 2008-07-05

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目 (No.50636050)

作者简介: 吴学红 (1979-), 男, 河南固始人, 博士研究生, 主要从事强化传热与无网格方法及先进数值方法方面的研究。

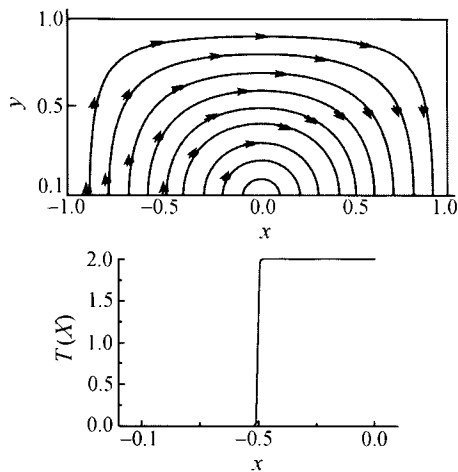
图1 流场与进口温度分布 ($\alpha = 100$)

Fig.1 Specified velocity field and inlet temperature

用二维、稳态无源项的对流 - 扩散方程来描述该问题, 引入 Pe 数作为参数, 该方程可表示如下:

$$u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \quad (1)$$

2 MLPG 方法的实施

无网格局部 Petrov-Galerkin 方法是在节点 X 处的局部子域 $\Omega_x (\Omega_x \in \Omega)$ 上进行积分, 对式 (1) 在点 X 的局部子域上进行加权积分:

$$\int_{\Omega_x} \left(u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \right) w d\Omega_x = 0 \quad (2)$$

对上式第二项进行分部积分, 并用 Gauss 定理可得:

$$\int_{\Omega_x} \left(u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} w + \frac{1}{Pe} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) d\Omega_x - \int_{\Gamma} \frac{1}{Pe} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j w d\Gamma = 0 \quad (3)$$

对于式 (3), 第二类边界条件可以直接代入上式进行积分, 但它不能直接处理第一类边界条件; 本文应用转换法处理第一类边界条件, 详细描述参见文献 [1]。

为了得到点 x 在子域 Ω_x 上离散方程 (它包含 N 个节点), 将在子域 Ω_x 上未知的温度函数用下式表达 [1]:

$$T^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x) \quad (4)$$

式中, $\mathbf{p}^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]$ 是单项式基函数, $\mathbf{a}(x)$ 是待定系数矢量, $\mathbf{a}(x) = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)]$, m 是基函数的个数, 本文中取 $m=3$, 也即 $\mathbf{p}(x) = [1, x, y]$ 。系数矢量 $\mathbf{a}(x)$ 的计算是对试函数在点 $x=x_I$ 处误差的加权平方和来决定, 如下式:

$$J(\mathbf{a}(x)) = \sum_{I=1}^N w_I(x) [T^h(x_I) - \hat{T}^I]^2 = \sum_{I=1}^N w_I(x) [\mathbf{p}^T(x_I) \mathbf{a}(x) - \hat{T}^I]^2 \quad (5)$$

式 (5) 中, \hat{T}^I 为局部近似的值 [1]。目前常用的权函数有样条型权函数、高斯型权函数。本文选取三次样条型权函数:

$$w_I(x) = \begin{cases} 2/3 - 4D_I^2 + 4D_I^3 & D_I \leq 0.5 \\ 4/3 - 4D_I + 4D_I^2 - 4/3D_I^3 & 0.5 < D_I \leq 1 \\ 0 & D_I > 1 \end{cases} \quad (6)$$

式 (6) 中, $D_I = \sqrt{(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2}/r_I$, r_I 为节点的支持域尺寸。

令式 (5) 中 J 取极小值可得出 $\mathbf{a}(x)$, 把它代入到式 (4) 可得:

$$\hat{T}^h(x) = \Phi^T(x) \cdot \hat{T} = \sum_{I=1}^N \phi(x) \hat{T}^I \quad x \in \Omega_x \quad (7)$$

其中, $\Phi^T(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x)$ 为型函数, $\mathbf{A}(x) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}$, $\mathbf{B}(x) = \mathbf{p}^T \mathbf{w}$ 。

把式 (7) 代入到式 (3), 并对整个计算区域内的节点进行积分计算, 整理可得:

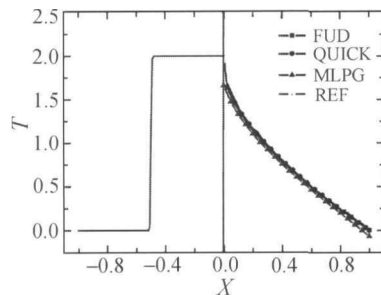
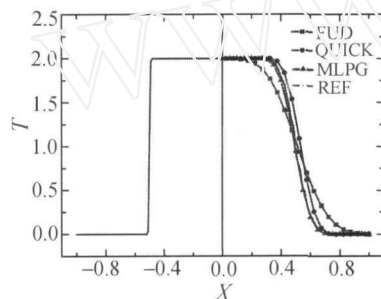
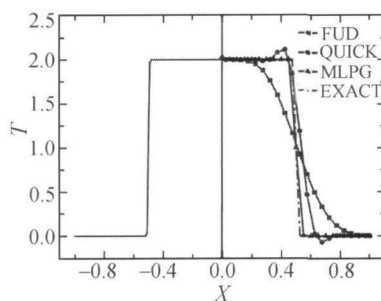
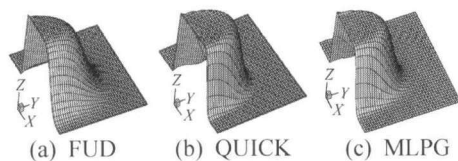
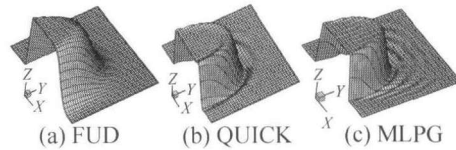
$$\sum_{J=1}^M \int_{\Omega_x} \left(u_k \frac{\partial \Phi^J \hat{T}^J}{\partial x_k} w_I + \frac{1}{Pe} \frac{\partial \Phi^J \hat{T}^J}{\partial x_k} \frac{\partial w_I}{\partial x_k} \right) d\Omega_x - \sum_{J=1}^M \int_{\Gamma_1} \frac{1}{Pe} \frac{\partial \Phi^J \hat{T}^J}{\partial x_k} w_I d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \frac{1}{Pe} q w_I d\Gamma_2 = 0 \quad (8)$$

式中, M 是计算区域的总节点数, I, J 代表节点; Γ_1 与 Γ_2 是第一类与第二类边界条件。

3 计算结果及讨论

本文应用 MLPG 方法分别计算了 $Pe=10, 500$ 和 1000000 三种工况, 并与采用有限容积法 (一阶迎风格式 FUD 和 QUICK 格式) 的计算结果进行比较。计算结果如图 2~4 所示, 其中参考值 (REF) 是利用 ULTRA-3/5/7 迎风格式计算出来的结果 [11]。从图中可以看出, 在 $Pe=10$ 时, 计算结果与参考值符合得很好, 这时扩散项占优, 因此其计算值比较一致。而在 $Pe=500$ 时, 采用 MLPG 与 QUICK 的计算结果与参考值符合得很好, 而采用 FUD 得到的结果则有严重的假扩散, 使边界上的剧烈变化在出口处被大大地抹平。在 $Pe=1000000$ 时, MLPG 的计算值与精确解比较接近, 而 QUICK 有一定的越界

现象。图 5 给出了在 $Pe=500$ 时的温度分布, 可以看出 QUICK 有越界现象, 而 MLPG 未出现此现象。图 6 是在 $Pe=1000000$ 时, MLPG 与 QUICK 都存在的越界现象。从这些图中可以得出 MLPG 方法是一种高精度的数值计算方法, 能够比较好地处理高 Pe 数的流动问题; 但在 Pe 数较大时也存在着一一定的越界现象, 因此也需要构建一些好的格式去消除这种现象。但是在网格数为 42×42 时和相同的计算条件下, MLPG 方法的计算时间 (232 s) 是 QUICK 计算时间 (2.4 s) 的 100 倍左右; 因此目前 MLPG 方法的缺点是计算量较大, 有待改进。

图 2 $Pe = 10$ 时进出口截面温度分布Fig.2 Distributions of inlet and outlet temperature- $Pe = 10$ 图 3 $Pe = 500$ 时进出口截面温度分布Fig.3 Distribution of inlet and outlet temperature- $Pe = 500$ 图 4 $Pe = 10^6$ 时进出口截面温度分布Fig.4 Distribution of inlet and outlet temperature- $Pe=10^6$ 图 5 $Pe = 500$ 时温度分布Fig.5 Distribution of temperature- $Pe = 500$ 图 6 $Pe = 1000000$ 时温度分布Fig.6 Distribution of temperature- $Pe = 1000000$

4 结 论

本文分别采用 MLPG 方法、有限容积法对 Smith-Hutton 问题进行了数值求解, 并与文献 [11] 中的参考值做了比较, 研究结果表明:

(1) 在低 $Pe=10$ 时, MLPG 方法、FUD 和 QUICK 格式的计算结果与文献中的参考值符合很好。

(2) 在 $Pe=500$ 时, MLPG 方法的计算值与文献的中结果符合得很好; FUD 格式存在假扩散现象, 而 QUICK 格式的则存在越界现象。

(3) 在高 Pe 数情况下 ($Pe=1000000$), MLPG 方法得到的出口计算值要好于 QUICK 格式和 FUD 格式的计算值, 但前两种方法都有一定的越界现象。MLPG 方法的计算量相对较大, 有待改进。

参 考 文 献

- [1] Atluri S N, Shen S P. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method. California: Tech Science Press, 2002
- [2] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless Methods: an Overview and Recent Developments. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1996, 139: 3-47
- [3] Monghan J J. Smoothed Particle Hydrodynamics. Annu. Rev. Astron. Astrophys, 1993, 30: 543-574
- [4] Chen JK, Beraun JE, Carney TC. A Corrective Smoothed Particle Method for Boundary Value Problems in Heat Conduction. Int. J. Numer. Meth. Engrg., 1999, 46: 231-252
- [5] Singh A, Singh IV, Prakash R. Numerical Solution of Temperature-Dependent Thermal Conductivity Problems Using a Meshless Method. Numer. Heat Transfer, Part A, 2006, 50: 125-145
- [6] Singh IV, Sandeep K, Prakash R. Heat Transfer Analysis of Two-Dimensional Fins Using Meshless Element-Free Galerkin Method. Numer. Heat Transfer A, 2003, 44(1): 73-84
- [7] Singh IV, Sandeep K, Prakash R. The Element Free Galerkin Method in Three-Dimensional Steady State Heat Conduction. Int. J. Comput. Eng. Sci., 2002, 3(3): 291-303
- [8] Alturi SN, Zhu TL. A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics. Comput. Mech., 1998, 22: 117-127
- [9] Smith RV, Hutton AG. The Numerical Treatment of Advection: a Performance Comparison of Current Methods. Numer. Heat transfer, 1982, 5: 43-461
- [10] 陶文铨. 计算传热学的近代进展. 北京: 科学出版社, 2000. 360-361
- [11] TAO Wen-Quan. Recent Advances in Computational Heat Transfer. Beijing: Science Press, 2000. 360-361
- [11] Leonard BP, Mokhtari S. ULTRA-SHARP solution of the Smith-Hutton Problem. Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow, 1992, 2: 407-427