

高精度有限差分在湍流直接数值模拟中的应用

马良栋 李增耀 陶文铨

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 能源与动力工程学院, 陕西 西安 710049)

摘要 本文采用高精度有限差分法对矩形管道内充分发展湍流换热进行了直接数值模拟, 湍流雷诺数 Re_τ 和普朗特数分别为 400 ($Re_m=6200$) 和 0.71, 压力泊松方程分别采用两种不同的离散格式 (二阶和四阶中心差分离散)。结果表明, 同二阶中心差分格式相比, 高精度有限差分可以在较少的网格下得到较好的结果; 压力泊松方程采用四阶中心差分或二阶中心差分对计算结果的影响甚小, 但采用二阶中心差分, 可以节省大量的计算时间。

关键词 高精度有限差分; 湍流; 直接数值模拟

中图分类号: O357.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-231X(2007)05-0859-03

THE APPLICATION OF HIGH RESOLUTION FINITE DIFFERENCE SCHEME IN DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOW

MA Liang-Dong LI Zeng-Yao TAO Wen-Quan

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, School of Energy & Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract A direct numerical simulation of a fully developed turbulent flow and heat transfer in a square duct is studied based on high resolution finite difference scheme. The flow and temperature fields are obtained at a turbulent Reynolds number of 400 based on the mean friction velocity and the hydraulic diameter, and the Prandtl number (Pr) of 0.71. Two kinds of point-stencil method are used for the spatial derivatives of the pressure Poisson equation, i.e. the second-order and fourth-order central difference, respectively. The results show that satisfactory solutions can be obtained in the present DNS simulation with coarse grids compared with the method of second-order central difference. And the solutions from the two kinds of point-stencil method for pressure Poisson equation are consistent with the second-order central difference being more economical in saving computation time.

Key words high resolution finite difference; turbulence; direct numerical simulation

1 引言

直接数值模拟 (DNS) 作为研究手段, 与试验技术、理论分析以及其它的数值方法相互补充, 随着计算技术的提高, 湍流直接数值模拟在湍流研究中越来越发挥着重要的作用^[1]。而高精度差分格式在研究多尺度的流动结构和流动机理上具有重要的作用, 是湍流直接数值模拟研究的重要方法。Rai 和 Moin^[2] 最早采用高精度的有限差分法对槽道湍流进行了直接数值模拟, 之后, 许多研究者均采用了这一方法^[1,3]。本文对具有两个方向各向异性的壁面湍

流实施了高精度有限差分法, 并且对压力泊松方程分别采用四阶中心差分和二阶中心差分进行计算, 结果表明, 压力泊松方程的离散格式对计算结果的影响不大, 特别在并行计算中, 采用二阶中心差分是经济的, 可以大大节省计算时间。

2 物理数学模型

本文以矩形通道湍流流动和换热为例, 其物理模型如图 1 所示, 管道的高为 H , 长为 L , x 为主流流动方向, y 和 z 为展向, 管道左右壁面绝热,

收稿日期: 2007-01-11; 修订日期: 2007-07-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.50476046; No.50636050)

作者简介: 马良栋 (1976-), 男, 陕西镇巴人, 博士研究生, 主要从事强化传热及湍流数值模拟的研究。

上下壁面等壁温且下表面是高温，上表面是低温，设矩形通道内充满不可压缩流体，在均匀的平均压力梯度驱动下流动，不考虑重力的影响。其控制方程是连续性方程，不可压缩的 N-S 方程以及能量方程，见文献 [4] 所示。

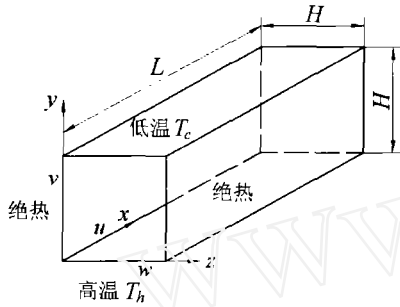


图1 管道几何模型及坐标

计算中壁面采用无滑移边界条件，流向方向和温度为周期性边界条件。时间项采用显式二阶的 Adams-Bashforth 格式。对流项采用五阶迎风偏置格式，扩散项采用六阶中心差分。其具体的离散方法见文献 [1,2]。下面的图例中，2nd-order-c 表示二阶中心差分格式，higher-order 表示高阶迎风偏置格式，且压力泊松方程的散度算子和梯度算子为四阶中心差分，higher-order-2p 表示高阶迎风偏置格式，但压力泊松方程的散度算子和梯度算子为二阶中心差分。

3 计算结果比较

图 2 给出了湍流脉动强度的分布，对于主流脉动强度 u_{rms} ，在 $16 < y^+ < 120$ 的范围内，本文的计算均小于大涡模拟的计算结果 [5]，但是两种高阶格式的结果一致且均好于二阶中心差分格式，密网格下的二阶中心差分格式略好于疏网格的结果。同文献 [6] 计算结果的差异，主要在于雷诺数的不同引起的。图 2(b)、(c) 表明，对于 v_{rms} 和 w_{rms} ，本文直接模拟的计算结果均高于大涡模拟的计算结果，但是两种高阶格式的计算结果同样也是一致的。

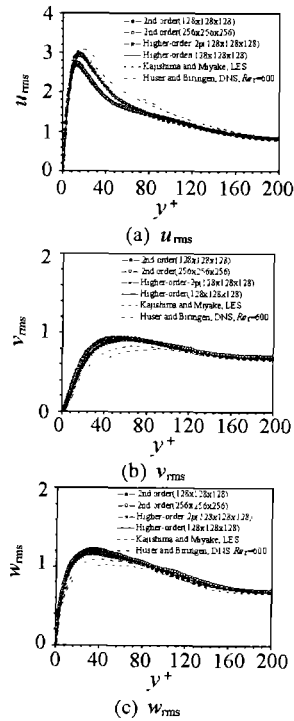


图2 湍流脉动强度的分布 (z=0.5)

图 3 表明，对于雷诺应力 $-<u'v'>$ 的分布，二阶中心差分和高阶格式的结果差别甚小，但密网格下的二阶中心差分和高阶格式方法与大涡模拟的结果符合较好。图 4 给出了壁面切应力沿壁面的局部分布，从图中可以看出，高阶格式与密网格下二阶中心差分格式的结果与文献 [6] 的计算结果一致。

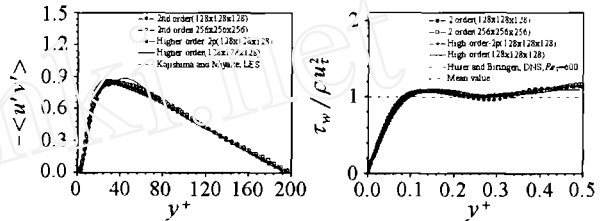


图3 雷诺应力的分布 图4 壁面切应力的分布

图 5 给出了主流平均速度的对数坐标分布，在流动的粘性底层内 ($y^+ < 5$)，各计算结果都符合壁面的线性律 $<u^+> = y^+$ 。在对数区域 ($y^+ > 40$) 的对数区域，计算结果符合对数律，但是在矩形通道里，并不满足 $<u^+> = 2.5 \ln y^+ + 5.2$ ，而是大于这个值，从图中还可以看出，密网格的二阶中心差分和高阶格式的计算结果与文献 [6] 的结果符合较好，而疏网格二阶中心差分的结果偏小。

图 6 给出平均温度 θ 与 Θ_τ 的比值 (Θ^+) 沿下壁面平分线的分布，其中 Θ_τ 定义为： $\Theta_\tau = q_w / (\rho c_p u_\tau)$ ，在 $y^+ < 8$ 的近壁面附近，四种方法 θ / Θ_τ 与线性关系式 $\Theta^+ = Pr y^+$ 符合较好。但是当 $y^+ > 8$ 之后，高阶格式的计算结果要大于二阶中心差分，但两种高阶格式的结果一致。

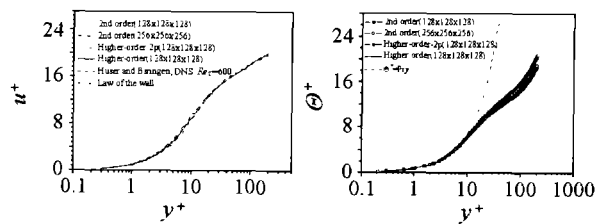


图5 主流平均速度的对数坐标分布 (z=0.5) 图6 沿下壁面平分线平均温度 θ / Θ_τ 的分布

图 7 给出了管道横截面上平均温度沿下壁面平分线 ($z=0.5$) 的分布，从图中可以看出，本文的计算值与文献 [4] 的结果符合较好，在近壁面，温度梯度较大，在管道中心区域，温度梯度减小。图 8 给出了沿高温面的局部努谢尔特数 Nu 的分布，从图中可以看出，在拐角的附近，局部换热系数最大。由图可知，在密网格时，二阶中心差分格式的结果要高于高阶格式，但在疏网格下，二阶中心差分格式的

结果要高于高阶格式。

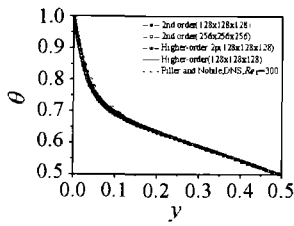


图7 平均温度沿下壁面平分线的分布

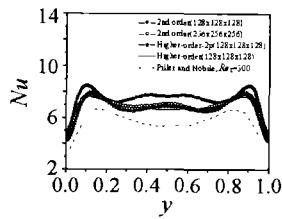


图8 沿高温面局部 Nu 的分布

表1给出了主流特征速度、摩擦系数及平均 Nu 的比较,从表中可以看出,对于疏网格,采用二阶中心差分的计算结果与文献相比,误差较大,不能正确地模拟出管道中心区域的主流速度,因此,平均速度偏低,与试验比较,摩擦系数偏大。但是对于高阶格式,无论压力泊松方程采用四阶中心差分还是二阶中心差分离散,与文献的结果比较符合,甚至压力泊松方程采用二阶中心差分离散时的结果更好。当网格数为 $256 \times 256 \times 256$ 时,与疏网格相比,结果大大好转,但是与高阶格式及文献相比,还是稍差。表中的平均 Nu 与图8的结果是一致的,疏网格下二阶中心差分格式的预测偏大。

从上面的比较表明,与传统的二阶中心差分相比,高阶格式在较少的网格下就能预测出较好的结果,而二阶中心差分需要较密的网格,说明对于湍流的直接数值模拟,控制方程的离散格式精度对计算结果精度的影响是相当重要的。通过对压力泊松方程采用不同离散格式的实施表明,压力泊松方程采用四阶中心差分或二阶中心差分离散对计算结果的影响甚小,但压力泊松方程采用二阶中心差分,对于并行计算可以节省大量的计算时间。

4 结 论

本文将高精度差分格式应用于在两个方向各向异性的湍流直接数值模拟中。通过对矩形通道的湍

流流动和换热的直接数值模拟表明,在非均匀网格上通过 lagrange 插值法直接构造差分格式,使得差分格式在近壁面附近具有足够高的精度,从而克服了传统的二阶精度格式在网格剧烈变化时造成的计算精度的下降。高阶格式能在较少的计算网格下就能预测出较好的结果,而二阶中心差分需要的网格数远远大于高精度格式。由压力泊松方程采用不同离散格式的实施结果表明,压力泊松方程的离散精度对结果的影响不大,无论采用四阶中心差分或二阶中心差分都可以得出较好的结果。因此,动量方程离散格式的精度对湍流的直接数值模拟是否成功是至关重要的。

致 谢: 本文的并行计算是在上海超级计算中心的曙光 4000A 超级计算机上完成,特此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 董宇红. 热剪切湍流的直接数值模拟和大涡模拟研究: [博士学位论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 2004
- [2] Rai M M, Moin P. Direct Simulations of Turbulent Flow Using Finite-Difference Schemes. *J. Computational Physics*, 1991, 96(1): 15-53
- [3] Kim W W, Menon S. An Unsteady Incompressible Navier-Stokes Solver for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1999, 31(6): 983-1017
- [4] Piller M, Nobile E. Direct Numerical Simulation of Turbulent Heat Transfer in a Square Duct. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2002, 12(6): 658-686
- [5] Kajishima T, Miyake Y. A Discussion on Eddy Viscosity Models on The Basis of The Large Eddy Simulation of Turbulent Flow in a Square Duct. *Computers Fluids*, 1992, 21(2): 151-161
- [6] Huser A, Biringen S. Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow in a Square Duct. *J. Fluid Mech.*, 1993, 257(1): 65-95
- [7] Dean R B. Reynolds Number Dependence of Skin Friction and Other Bulk Flow Variables in Two-Dimensional Rectangular Duct Flow. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 1978, 100(2): 215-223

表1 主流特征速度、摩擦系数及平均 Nu 的比较

算例	2nd-order	2nd-order	Higher-order-2p	Higher-order	文献 [5]
网格数	128^3	256^3	128^3	128^3	-
u_c	18.94	20.04	19.90	19.77	20.0
u_{mean}	14.59	15.24	15.50	15.35	15.5
$C_{f,cal}$	9.39×10^{-3}	8.61×10^{-3}	8.32×10^{-3}	8.64×10^{-3}	-
计算所得 Re 数	5838	6096	6199	6138	6200
$C_{f,exp} = 0.073Re^{-0.25}$ [7]	8.38×10^{-3}	8.26×10^{-3}	8.23×10^{-3}	8.24×10^{-3}	8.23×10^{-3}
摩擦系数相对误差 ϵ	12%	4.2%	1.2%	2.9%	-
Nu	7.48	7.11	6.81	6.77	-