第 28 卷第 3 期 工 程 热 物 理 学 报 Vol.28, No.3
2007 年 5 月 JOURNAL OF ENGINEERING THERMOPHYSICS May, 2007

Krylov 子空间法在 SIMPLER 算法中的求解性能分析

金巍巍 孙东亮 陶文铨 何雅玲

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 陕西 西安 710049)

摘 要 本文开发了 Krylov 子空间法中的 Bi-CGSTAB、GMRES(m)、CGS、TFQMR 及 QMR 方法的计算程序，并将其实施于 SIMPLER 算法作为其内迭代方法，针对 CFD/NHT 领域的问题，研究了它们的求解特性；发现：Bi-CGSTAB 方法有着高效的收敛速度和良好的稳定性；N-S 方程求解中不同方程不同 m 值的协调选取是 GMRES(m) 方法在 CFD/NHT 领域推广应用的关键；CGS 和 QMR 方法易于中断；TFQMR 方法收敛速度慢于其他方法，但能适用于更广泛问题的求解。

关键词 Krylov 子空间法；SIMPLER 算法；求解性能分析
中图分类号：TK124 **文献标识码**：A **文章编号**：0253-231X(2007)03-0478-03

ANALYSIS OF SOLUTION CHARACTERISTIC FOR KRYLOV SUBSPACE METHODS IN SIMPLER ALGORITHM

JIN Wei-Wei SUN Dong-Liang TAO Wen-Quan HE Ya-Ling

(*The State Key Lab. of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

Abstract In this paper, the programs of Krylov subspace methods, namely Bi-CGSTAB, GMRES(m), TFQMR, CGS and QMR methods, were developed and implemented in SIMPLER algorithm as the inner iteration method. Analyzing the specific examples, we can find that, Bi-CGSTAB method behaves more efficient in CPU time and higher robustness than other methods; it is a key to GMRES(m) method to choose the different m value to different equations of N-S equation in order to enlarge the application in CFD/NHT; CGS and QMR methods are easily broken off; the CPU time of TFQMR method is the slowest among other methods, but this method is easier to solve wider problems of CFD/NHT.

Key words Krylov subspace method; SIMPLER algorithm; analysis of solution characteristic

1 引 言

网格生成及代数方程求解是传热与流动问题数值计算耗时最多的两个环节。但从上世纪 80 年代起 NHT 领域就一直沿用 ADI (交替方向隐式) 迭代法。随着计算机工业以及计算流体和传热的迅猛发展，人们需要应用更有效的代数方程求解方法。数值代数界前沿的代数方程求解方法 —Krylov 子空间法，由于高效的收敛速度而成为目前求解大型线性系统最重要的迭代技术 [1,2]；近年来，在各种应用领域几乎是独领风骚。

文献 [3] 研究了 Krylov 子空间法中的 Bi-CGSTAB 和 TFQMR 方法与 ADI 以及 SIP(强隐迭代过程) 方法相比较的收敛速度以及对算法健壮性的影响。本文在上述研究的基础上开发了 GMRES(m)、CGS 和 QMR 方法的计算程序，综合比较了 ILU(0) 预处理下求解非对称非正定矩阵的 5 种 Krylov 子空间法作为 SIMPLER 算法内迭代方式时的求解特性。

2 Krylov 子空间法概述

所谓的 Krylov 子空间法 [4]，实际上是给一个线

收稿日期：2006-12-17; **修订日期**：2007-03-18
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (No.50476046; No.50636050)
作者简介：金巍巍 (1972-)，女，新疆石河子人，博士，主要从事强化传热的研究工作。

性系统 $Ax=b$，这里 A 是一个大的、稀疏的 $n\times n$ 非奇异矩阵，根据标准的 Richardson 迭代，有: $x_k=(I-A)x_{k-1}+b$。在变换的 Krylov 子空间上产生近似解: $x_0+K^k(A;r_0)=x_0+\{r_0,Ar_0,\ldots,A^{k-1}r_0\}$。这里，对于给定初始矢量 x_0，有残量 $r_0=b-Ax_0$。依据这一基本思想根据不同的构造方式 Krylov 子空间法主要分为 3 种: (1) 构造一个 x_k，使对应残量与当前子空间正交的 $Ritz-Galerkin$ 方法; (2) 确定 x_k 使得欧拉范数 $\|b-Ax_k\|_2$ 在 $K^k(A;r_0)$ 上最小的最小残量法; (3) 寻找一个 x_k 使得残量 $b-Ax_0$ 正交于一些其他的合适的 k 维子空间的 $Petrov-Galerkin$ 的方法。近年来，将三种方式混合的构造思想备受推崇。另外，为了保证收敛性和健壮性，预处理技术是 Krylov 子空间法有效实施的关键组成部分。

3 算例分析

本文采用 ILU(0) 预处理技术，将 Krylov 子空间法中 5 种不同代数方程求解方法实施于 SIMPLER 算法作为内迭代方法求解了顶盖驱动流和外掠后台阶流动问题，分析对比了它们的求解性能。物理问题描述见文献 [5,6]。程序正确性考核从略。

3.1 顶盖驱动流

对于该问题，计算了 $Re=1000$ 时的流动状况，收敛判据取连续性方程节点余量的最大绝对值 $S_{\max}$ 与参考质量流量之比，即相对残差 $RS_{\max}$ 小于 1.E-08。从表 1，可以看出 5 种代数方程求解方法中，Bi-CGSTAB 方法在密网格和细网格下均有较快的收敛速度。CGS 方法的收敛速度仅次于 Bi-CGSTAB。QMR 方法在本问题的求解中发生了严重的中断。

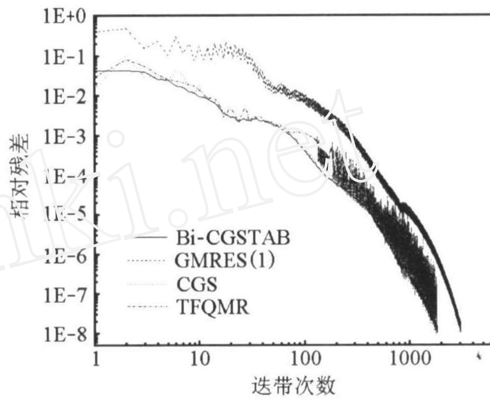
表 1 顶盖驱动流在 Re=1000 时不同代数方程求解方法及不同网格下的 CPU 时间

网格数	Bi-CGSTAB	GMRES(1)	TFQMR	GS	QMR
42×42	16.55	27.38	26.82	18.17	-
82×82	178.52	310.67	394.86	205.23	-

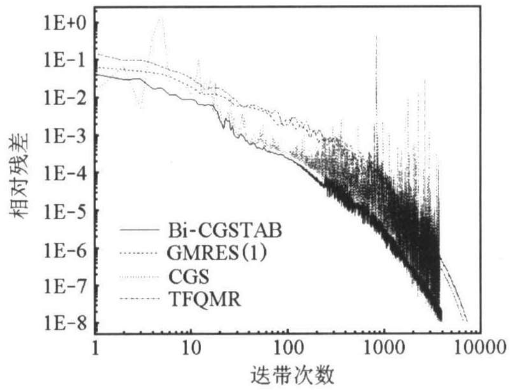
从图 1 可以看出，Bi-CGSTAB 有较快而且稳定的收敛特性。CGS 也能获得较快的收敛速度，但求解过程易于发生剧烈的振荡，这种求解特性同样有可能造成物理问题求解中的严重中断。当 m 取值为 1 时，GMRES(m) 方法以及 TFQMR 方法有着稳定的求解性能，但求解速度慢于 Bi-CGSTAB。

3.2 外掠后台阶流动

对于该问题，计算了 $Re=300$ 时的流动状况，相对残差 $RS_{\max}$ 取 2.E-06。从表 2 可以看到，在本问题的求解中，GMRES(m) 方法表现出最快的收敛速度，这说明针对具体问题合适选取 m 的值是这种方法获得快速收敛的关键。CGS 方法在本问题的求解中产生了中断。QMR 方法能够获得收敛的解。TFQMR 方法的收敛速度最慢。



(a) 网格数为 42×42



(b) 网格数为 82×82

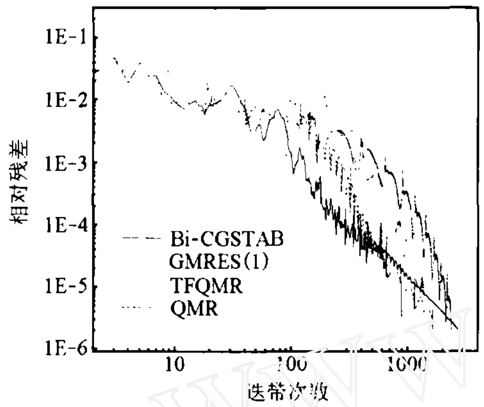
图 1 顶盖驱动流相对残差和迭代次数的关系曲线

表 2 外掠后台阶在 Re=300 时不同代数方程求解方法及不同网格下的 CPU 时间

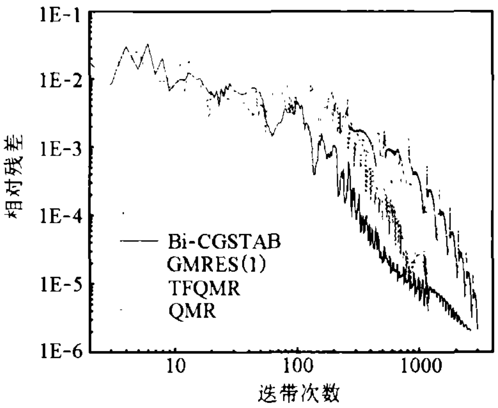
网格数	Bi-CGSTAB	GMRES(1)	TFQMR	CGS	QMR
62×32	29.64	19.38	26.38	-	30.27
82×42	55.05	25.91	75.27	-	72.95

从图 2 中可以看出，GMRES(m) 方法在适当的 m 取值下可以获得甚至在收敛过程后期都近似垂直递减的相对残差。QMR 和 TFQMR 方法在求解过程中表现出持续的波动，这也是造成它们求解时间延长的一个重要的原因。Bi-CGSTAB 方法在本问题的求解中仍旧有着良好的收敛速度和较为稳定的求解过程。但本人的数值试验证明，对于上述任何一种代数方程求解方法，由于 SIMPLER 算法中压力和速度松弛因子选取的原因，都有可能造成如图 2(a) 中 Bi-CGSTAB 方法所显示的在迭代收敛后求

解过程有规律的频繁振荡，这种振荡不会影响求解的收敛性以及计算结果，但会延长计算时间。



(a) 网格数为 62×32



(b) 网格数为 82×42

图 2 外掠后台阶流动相对残差和迭代次数的关系曲线

4 结 论

(1) Bi-CGSTAB 方法适用于大多数问题的求解，并且均能表现出高效的收敛速度和良好的稳定性。

(2) m 的恰当选取是 GMRES(m) 方法高效求解的关键；但对于速度和压力耦合求解的 SIMPLE 系列算法，如何协调求解不同方程时不同 m 的取值是这一方法在 CFD 领域进一步发展推广而有待解决的难题。

(3) CGS 方法有着高效的收敛速度，但求解过程易于剧烈振荡而产生中断，QMR 方法也是容易产生严重中断的代数方程求解方法。

(4) 应用于 SIMPLER 算法中的 TFQMR 方法，收敛速度慢于以上各方法，但其稳定性最佳，能够适用于更广泛问题的求解。

参 考 文 献

[1] G H Golub, et al. Matrix Computations. In: 3rd ed. Baltimore: Johns Hopkins Press, 1996

[2] Y Saad. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. New York: PWS Publishing, 1996

[3] 金巍巍，陶文铨，何雅玲. 代数方程求解方法收敛速度比较及对算法健壮性的影响. 西安交通大学学报，2005, 39(9): 966–968

[4] Hend A, Van der Vorst. Efficent and Reliable Iterative Methods for Linear Systems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, 149(1): 251–265

[5] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-*Re* Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. J. Comput. Phys., 1982, 48: 387–411

[6] Kondoh T, Nagano Y, Tsuji T. Computational Study of Laminar Heat Transfer Downstream of a Backward-Facing Step. Int. J. Heat Mass Transfer, 1993, 36(3): 577–591