

# 代数方程求解方法收敛速度比较及对算法健壮性的影响

金巍巍, 陶文铨, 何雅玲

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 710049, 西安)

**摘要:** 将交替方向隐式(ADI)、强隐(SIP)及 Krylov 子空间法中的 TFQMR、Bi-CGSTAB 方法实施于 SIMPLER 算法, 作为其内迭代求解方法, 比较了不同代数方程求解方法的收敛速度, 并首次分析了它们对算法健壮性的影响。结果发现: 内迭代方法不同, SIMPLER 算法所表现出的健壮性也会有较大差异, 采用不同的求解方法以及调节求解方法中的参数可以有效调整 SIMPLER 算法的健壮性。通过对具体算例的研究表明: 当 SIP 方法的抵消参数  $a$  取值较高时, 能获得比 ADI 快 30%~50% 的平均收敛速度, 但算法的健壮性减弱; 减小  $a$  值, 在获得与 ADI 方法相同的收敛速度下, 算法的健壮性却能远好于 ADI; ILU(0) 预处理的 Bi-CGSTAB 方法收敛速度较 ADI 平均能快 15%~40%; 当 SIP 方法取某  $a$  值时也能获得此收敛速度, 但算法所表现出的健壮性却差于 Bi-CGSTAB 方法; ILU(0) 预处理的 TFQMR 方法收敛速度慢于以上各方法, 但其健壮性最佳。

**关键词:** 代数方程求解方法; 收敛速度; 健壮性

**中图分类号:** TK124 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2005)09-0966-05

## Comparison of Convergence Rate and Analysis of Robustness by Using Different Algebraic Equation Solution Methods

Jin Weiwei, Tao Wenquan, He Yaling

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** The alternative direct iterative (ADI), strong implicit procedure (SIP), preconditioning transpose-free variant of quasi minimum residual method (TFQMR) and biconjugate gradient stabilized method (Bi-CGSTAB) of the Krylov subspace methods were implemented in SIMPLER algorithm to solve the algebraic equations. The convergence rate and the robustness comparisons were conducted for the solution procedure using the above mentioned different iterative solution methods. It is found that the solution methods for the algebraic equations can affect the robustness of SIMPLER algorithm. By using different algebraic equation solution methods and the related parameters, the robustness of SIMPLER algorithm can be controlled to a certain degree. Through analysis of specific examples, it is found that the convergence rate of SIP method can be about 30% to 50% higher than that of ADI with high offset factor  $a$ , while the related robustness of SIMPLER is somewhat weakened. In contrast, decreasing  $a$  makes its convergence rate more or less the same as that of ADI, and the robustness is much better than that of ADI. The average convergence rate of ILU(0) preconditioning Bi-CGSTAB method is about 15% to 40% higher than that of ADI, which can be easily reached by SIP method with an appropriate value of offset factor  $a$ , but the robustness of SIP is worse than that of Bi-CGSTAB. The convergence rate of preconditioning TFQMR is the smallest, but the robustness is the best.

**Keywords:** algebraic equation solution method; convergence rate; robustness

收稿日期: 2005-01-05. 作者简介: 金巍巍(1972~), 女, 博士生; 陶文铨(联系人), 男, 教授, 博士生导师. 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50476046; 50425620); 西安交通大学博士学位论文基金资助项目.

从 20 世纪 80 年代末以来, 对于求解非线性问题离散所形成的代数方程组的高效方法的研究越来越得到广泛的重视. 数值代数界对共轭梯度类 (CG-like) 方法的研究就是从那个时期开始逐步走向繁荣的, 经过近 30 年的充分发展完善, 使它成为了目前用于求解大型线性系统的最重要的迭代技术<sup>[1,2]</sup>, 近年来在各种应用领域几乎是独领风骚<sup>[3]</sup>, 而它的收敛速度正是此方法成功的关键<sup>[4]</sup>. 但是, 它在 CFD 领域的应用还没能得到广泛推广. 本文将这种前沿的代数方程求解方法——Krylov 子空间法 (又称共轭梯度类方法) 中的 TFQMR、Bi-CGSTAB 方法, 实施于 SIMPLER 算法, 作为其内迭代方式, 并与强隐 (SIP)、交替方向隐式 (ADI) 进行对比, 比较了不同代数方程求解方法的收敛速度.

算法的健壮性一直是评价算法好坏的重要指标之一. 长期以来, 研究者们对算法健壮性的认识多来自于不同算法间进行健壮性比较的结果, 却忽略了具体实施的代数方程求解方法等的影响. 本文的研究首次证明: 对任一种算法, 当所选择的内迭代方法不同时, 它们所表现出的健壮性是不同的. 本文在对上述代数方程求解方法收敛速度进行对比的同时, 还研究了不同代数方程求解方法对算法健壮性的影响.

### 1 ADI、SIP、Bi-CGSTAB、TFQMR 代数方程求解方法概述

在代数方程求解方法中, ADI 方法由 Peaceman 和 Rachford 于 1955 年提出, 并在计算传热学领域得到了广泛应用. SIP 方法在迭代求解过程中采用的直接解法比例比 ADI 方法更高, 是一种基于矩阵不完全分解技术的求解方法, 1968 年由 Stong 提出<sup>[5]</sup>. Krylov 子空间法是近年来数值代数界公认的求解大型线性方程组问题的最有效方法, 但这种方法目前还未能能在计算传热学领域广泛推广应用. 以上各迭代解法及实施步骤在文献 [6, 7] 中均有详细的介绍.

TFQMR 方法是由 Krylov 子空间法中的 CGS 方法变异而来的, 与 Bi-CGSTAB 算法一样, 是 Krylov 子空间法中最为盛行的主要算法之一, 这种算法的具体运算规则<sup>[8]</sup>如下

- (1) Start:
  - (a) Choose  $x_0 \in C^N$ ;
  - (b) Set  $\omega_1 = y_1 = r_0 = b - Ax_0$ ,  $v_0 = Ay_1$ ,

$$d_0 = 0;$$

$$\tau_0 = \|r_0\|, \quad \delta_0 = 0, \quad \rho_0 = 0;$$

(c) Choose  $r_0$  such that  $\rho_0 = r_0^H r_0 \neq 0$ .

(2) For  $n = 1, 2, \dots$  do:

(a) Set  $\sigma_{n-1} = r_0^H v_{n-1}$ ,  $\alpha_{n-1} = \rho_{n-1} / \sigma_{n-1}$ ;

$$y_{2n} = y_{2n-1} - \alpha_{n-1} v_{n-1};$$

(b) For  $m = 2n-1, 2n$  do:

- Set  $\omega_{m+1} = \omega_m - \alpha_{n-1} A y_m$ ;

- $\delta_m = \|\omega_{m+1}\| / \tau_{m-1}$ ,  $c_m = 1 / (1 + \delta_m^2)^{1/2}$ ;

- $\tau_m = \tau_{m-1} \delta_m c_m$ ,  $\rho_m = c_m^2 \alpha_{n-1}$ ;

- $d_m = y_m + (\delta_{m-1} \rho_{m-1} / \alpha_{n-1}) d_{m-1}$ ;

- $x^m = x^{m-1} + \rho_m d_m$ ;

- If  $x^m$  has converged: stop;

(c) Set  $\rho_n = r_0^H \omega_{2n+1}$ ,  $\beta_n = \rho_n / \rho_{n-1}$ ;

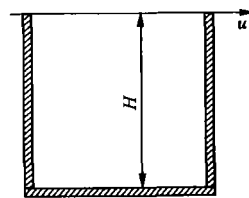
$$y_{2n+1} = \omega_{2n+1} + \beta_n y_{2n};$$

$$v_n = A y_{2n+1} + \beta_n (A y_{2n} + \beta_n v_{n-1}).$$

Bi-CGSTAB 方法的运算规则可参见文献 [6].

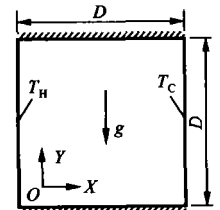
### 2 不同代数方程求解方法应用于 SIMPLER 算法的收敛性及健壮性分析

本文对顶盖驱动流和方腔自然对流 2 个层流流动与换热问题, 进行了不同内迭代方法的收敛特性及应用于 SIMPLER 算法的健壮性分析. 在进行比较时, 收敛判据取连续性方程节点余量的最大绝对值与参考质量流量之比小于某一给定的值. 上述 2 个问题分别示于图 1、图 2 中, 描述这些问题的控制方程是二维不可压缩流体的质量、动量和能量守恒方程, 对应自然对流, 引入 Boussinesq 假设, 这些在文献 [2, 3] 中均有详细的介绍, 此处从略.



Re = 100

图 1 顶盖驱动流



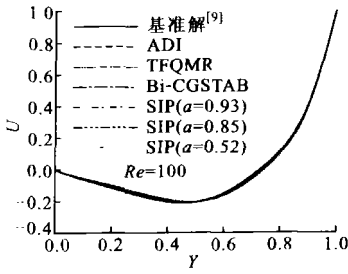
Ra = 10 000

图 2 方腔自然对流

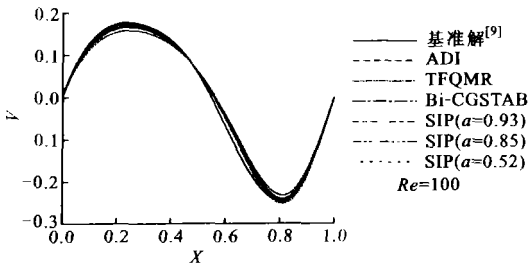
#### 2.1 不同代数方程解法的计算结果

2.1.1 顶盖驱动流 计算了 Re = 100 时顶盖驱动流的流动状况, 收敛判据取连续性方程节点余量的最大绝对值与参考质量流量之比小于  $3 \times 10^{-8}$ . 从

图 3 可以看出几种代数方程的求解方法, 在网格数为  $82 \times 82$  时, 计算所得的空腔内中轴线  $U$ 、 $V$  向速度与基准解<sup>[9]</sup>符合得均较好。



(a) 在  $X = 0.5$  的位置上速度  $U$  沿  $Y$  方向的分布



(b) 在  $Y = 0.5$  的位置上速度  $V$  沿  $X$  方向的分布

图 3 顶盖驱动流的不同代数方程求解结果与试验值的对比

2.1.2 方腔自然对流 在该问题的计算过程中, 所取的收敛判据仍旧是连续性方程节点余量的最大绝对值与参考质量流量之比, 在网格数为  $82 \times 82$  时, 收敛判据取为  $1.3 \times 10^{-8}$ , 在网格数为  $42 \times 42$  时, 收敛判据取为  $2.2 \times 10^{-8}$ , 表明连续性方程已满足。从表 1 可以看到不同代数方程求解方法所计算出的方腔的平均  $Nu$  值基本一致。

### 2.2 代数方程求解速度及算法的健壮性分析结果

在进行健壮性比较时, 分别在 2 种网格下计算了顶盖驱动流和方腔自然对流 2 个典型问题。收敛判据同上, 在相同网格密度下, 4 种算法的收敛精度取为一致。

在图 4 和图 5 中, 横坐标为时步倍率  $E (E = \alpha / (1 - \alpha))$ ,  $\alpha$  为松弛因子, 纵坐标为达到收敛要求所需的计算时间。这里以能获得收敛解的时步倍率变化范围的大小作为健壮性好坏的标志。表 2 为不同的代数方程求解方法分别在 2 种网格下, 以每个松弛因子的 ADI 计算时间为基准 (取为 1) 的相对 CPU 计算时间, 表格中的最后一栏 (平均值栏) 还对对应网格下的所有松弛因子的 CPU 时间取了平均值。

通过对上述 2 个问题的研究以及图 4 和图 5 所示的健壮性比较分析表明: 无论是在疏网格还是在密网格下, 算法的健壮性均会随着所选取的代数方程求解方法的不同而不同, 并且算法的健壮性可通过改变代数方程的求解方法或求解方法中的参数而进行控制调节。

不同求解方法的收敛速度对比如下: SIP 方法在取较高的  $a$  值时 ( $a$  为 SIP 方法中的抵消参数), 收敛速度会大大提高, 但其健壮性降低, 减小  $a$  的取值能够增强算法的健壮性, 但收敛速度减慢; 对表 2 和表 3 中所有松弛因子下的 CPU 时间取平均可以看出, 当  $a$  取值较高 (如  $a = 0.93$ ) 时 SIP 方法的平均收敛速度能较 ADI 方法快 30% ~ 50% (见平均值栏中的下划线所示), 而在某些松弛因子下, SIP 方法较 ADI 也能快 15% ~ 65% (见下划线所示); 在 Krylov 子空间法中, ILU(0) 预处理下的 Bi-CGSTAB 方法的平均收敛速度较 ADI 方法快 15% ~ 40% (见平均值栏中的下划线所示), 而在某些松弛因子下, 较 ADI 快 10% ~ 55% (见下划线所示), 且在此收敛速度下仍旧能够有较好的健壮性; 另外, SIP 和 Bi-CGSTAB 方法相对于 ADI 在密网格下比在稀网格下有更快的收敛速度; ILU(0) 预处理下的 TFQMR 方法的收敛速度远慢于 ADI, 但在上述问题中却有着非常好的健壮性。

表 1 不同代数方程求解方法在  $Ra = 10\,000$  时所计算出的  $Nu$  值

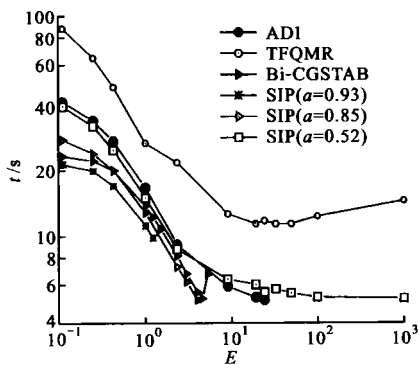
网格数	ADI	SIP			TFQMR	Bi-CGSTAB
		$a = 0.93$	$a = 0.85$	$a = 0.52$		
$42 \times 42$	2.258	2.259	2.259	2.259	2.258	2.258
$82 \times 82$	2.248	2.247	2.249	2.249	2.248	2.248
文献值 <sup>[10]</sup>		2.245				

表 2 顶盖驱动流在不同代数方程求解方法及不同网格下的相对 CPU 时间

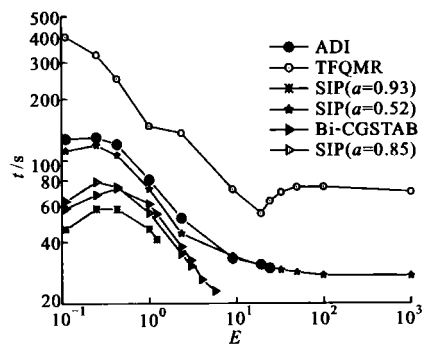
内迭代法	网格数	E											平均值
		0.111	0.250	0.429	0.667	1.000	1.500	2.333	4.000	9.000	19.000	24.000	
ADI	52×52	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	-	-	-	1.00
	82×82	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	-	-	-	1.00
Bi-CGSTAB	52×52	0.57	0.66	0.74	0.83	<u>0.89</u>	-	-	-	-	-	-	<u>0.74</u>
	82×82	<u>0.46</u>	0.52	0.61	0.76	0.72	-	-	-	-	-	-	<u>0.61</u>
a=0.93	52×52	0.52	0.59	0.63	0.67	-	-	-	-	-	-	-	0.60
	82×82	<u>0.36</u>	0.45	0.48	0.58	-	-	-	-	-	-	-	<u>0.47</u>
SIP a=0.85	52×52	0.68	0.71	0.74	0.77	0.80	-	-	-	-	-	-	0.74
	82×82	0.49	0.61	0.62	0.69	0.66	-	-	-	-	-	-	0.61
a=0.52	52×52	0.96	0.95	0.91	0.90	0.95	1.09	1.16	1.06	-	-	-	1.00
	82×82	0.87	0.91	0.88	0.90	0.85	1.02	1.00	1.00	-	-	-	0.93
TFQMR	52×52	2.15	1.92	1.75	1.60	2.36	2.17	2.19	2.26	-	-	-	2.05
	82×82	3.12	2.52	2.08	1.83	2.60	2.20	1.79	2.14	-	-	-	2.29

表 3 方腔自然对流在不同代数方程求解方法及不同网格下的相对 CPU 时间

内迭代法	网格数	E											平均值
		0.111	0.250	0.429	0.667	1.000	1.500	2.333	4.000	9.000	19.000	24.000	
ADI	42×42	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	82×82	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Bi-CGSTAB	42×42	0.66	0.73	0.78	0.75	0.69	0.73	0.75	0.77	-	-	-	0.73
	82×82	0.57	0.64	0.69	0.66	0.60	0.62	0.64	0.66	-	-	-	0.64
a=0.93	42×42	0.65	0.71	0.75	<u>0.75</u>	0.69	0.69	-	-	-	-	-	<u>0.70</u>
	82×82	0.48	0.56	0.62	0.61	0.59	0.61	-	-	-	-	-	0.58
SIP a=0.85	42×42	0.70	0.79	0.81	0.82	0.79	0.82	0.78	0.80	-	-	-	0.79
	82×82	0.57	0.66	0.72	0.70	0.71	0.72	0.72	-	-	-	-	0.69
a=0.52	42×42	0.85	0.93	1.00	1.09	1.09	1.12	1.11	1.13	1.10	1.08	1.07	1.05
	82×82	0.77	0.83	0.92	1.03	1.01	1.04	1.05	1.05	1.04	1.01	0.93	0.97
TFQMR	42×42	1.42	1.47	1.60	1.81	1.77	1.57	1.48	1.49	1.21	1.17	1.16	1.47
	82×82	2.05	1.75	2.34	2.85	2.63	2.39	2.03	1.37	1.39	1.32	1.24	1.94



(a) 网络数为 52×52



(b) 网络数为 82×82

图 4 顶盖驱动流健壮性比较结果

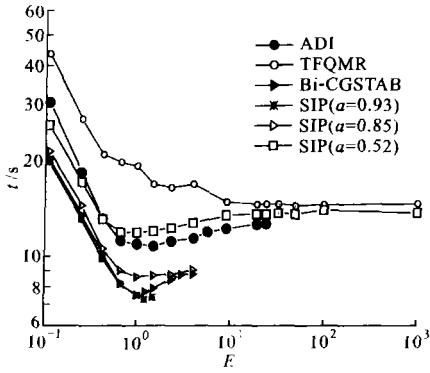
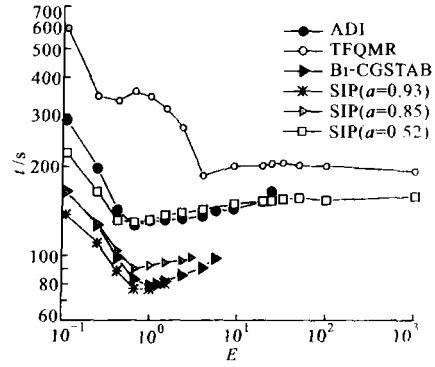
(a) 网络数为  $42 \times 42$ (b) 网格数为  $82 \times 82$ 

图5 方腔自然对流健壮性比较结果

### 3 结论

(1) 处理压力与速度耦合关系算法的健壮性与代数方程求解方法的健壮性有关。

(2) 改变代数方程求解方法或调整求解方法中的某些参数, 可以对算法的健壮性进行部分调节与控制. 使用不同预处理技术的 Krylov 子空间法, 有望进一步强化算法的收敛性与健壮性。

(3) SIP 方法中的  $a$  是能够对算法收敛性及健壮性进行平衡的控制因子. 当  $a$  取值较高时, SIP 能够获得比 ADI 快 30% ~ 50% 的平均收敛速度, 在某些松弛因子下, SIP 较 ADI 能快 15% ~ 65%, 但健壮性会减弱. 减小  $a$  值(如对上述 2 个问题取  $a=0.52$  时), 可获得与 ADI 相同的收敛速度, 但健壮性远好于 ADI, 所以综合而言, SIP 是优于 ADI 的代数方程求解方法。

(4) Krylov 子空间法中的 ILU(0) 预处理下的 Bi-CGSTAB 方法收敛速度较 ADI 平均能快 15% ~ 40%, 在某些松弛因子下能快 10% ~ 55%, 而且在此收敛速度下仍旧能够保持较好的健壮性. SIP 方法通过调整  $a$  值也能获得这样的收敛速度, 但在此速度下算法所表现出的健壮性却差于 Bi-CGSTAB 方法, 所以综合比较健壮性和收敛速度这两方面的因素, Bi-CGSTAB 是代数方程求解的较好方法;

(5) Krylov 子空间法中的 ILU(0) 预处理下的 TFQMR 方法收敛速度慢于以上各方法, 但其健壮性最佳。

### 参考文献:

- [1] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems [M]. New York: PWS Publishing, 1996. 144-205.
- [2] 戴华. 求解大规模矩阵问题的 Krylov 子空间法 [J]. 南京航空航天大学学报, 2001, 33(2): 139-145.
- [3] 蔡大用. 现代科学计算 [M]. 北京: 科学出版社, 2000. 51-75.
- [4] Golub G H, van Loan C F. Matrix computations [M]. 3rd ed. Baltimore: Johns Hopkins Press, 1996. 547-644.
- [5] Stone H L. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations [J]. SIAM J Numer Anal, 1968, 5(3): 530-558.
- [6] 陶文铨. 计算传热学的近代进展 [M]. 北京: 科学出版社, 2000. 264-306.
- [7] 陶文铨. 数值传热学 [M]. 第二版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001. 273-274.
- [8] Freund R W. A transpose free quasi-minimal residual algorithm for non-Hermitian linear systems [J]. SIAM J Sci Statist Comput, 1993, 14(2): 470-482.
- [9] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High  $Re$  solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method [J]. J Comput Phys, 1982, 48(3): 387-411.
- [10] Barakos G, Mitsoulis E. Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall function [J]. Int J Numer Methods Fluids, 1994, 18(7): 695-719.

(编辑 王焕雪)