

稳定性可保证二阶格式在多重网格中的有效性和经济性

马良栋, 李增耀, 陶文铨

(西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 基于一种稳定性可保证的二阶差分格式(SGSD), 对SIMPLE算法实施了完全多重网格循环以加速外迭代的收敛. 采用规正变量的方法实施了SGSD. 通过对二维顶盖驱动流动的计算, 分析了多重网格在SIMPLE算法中的收敛特性. 计算结果表明: SGSD格式具有与其他高阶格式及高阶组合格式相同的计算精度, 且收敛速度优于其他高阶格式, 在雷诺数较高时($Re=3000$), 其收敛速度是二阶迎风格式的1.77倍, 是QUICK格式的1.37倍, 同时在疏密网格层次上均可以保证计算的稳定性; 采用多重网格加速SIMPLE算法的迭代时, 不仅要考虑多重网格的循环方式, 还要考虑对流项的离散格式, 在计算中SGSD格式具有明显的优势.

关键词: 稳定性可保证二阶差分格式; 多重网格; 有效性; 经济性

中图分类号: TK124 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2005)09-0974-04

Efficiency and Accuracy of Stability Guaranteed Second-Order Difference Scheme in Full Multigrid Method

Ma Liangdong, Li Zengyao, Tao Wenquan

(State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Based on a new stability-guaranteed second-order difference (SGSD) scheme, the full multigrid cycle was implemented in SIMPLE algorithm in order to accelerate convergence of outer-iteration. The difference scheme was implemented by using normalized variable method. The convergence characteristics of full multigrid cycle in SIMPLE algorithm were analyzed by numerical simulation of 2D lid-driven cavity flow. The results show that the SGSD scheme can reach second order accuracy compared with other high-order schemes and the convergence rate is higher than that of other schemes. The convergence rate of SGSD is 1.77 times that of second-order upwind difference scheme and 1.37 times that of QUICK scheme with $Re=3000$, and the stability can be guaranteed in coarse or fine grid. When the multigrid technique is adopted to accelerate the convergence rate, both the circulation pattern and the discretization scheme of convection term should be taken into account. In this regard, the SGSD scheme has an obvious advantage for multigrid implementation.

Keywords: stability-guaranteed second-order difference scheme; multigrid; efficiency; accuracy

在求解不可压缩流动时, SIMPLE 算法^[1] 是最为广泛采用的算法之一. 为了提高数值精度, 不得不加密网格, 但如果采用传统的迭代解法(如SOR、

ADI等), 随着网格的加密, 收敛速度就会减慢. 为了加快迭代的收敛, 多重网格方法被引入到SIMPLE算法中. 将多重网格技术运用到SIMPLE算法

时, 在不同尺度的网格上实现了压力和速度之间的耦合, 因而可以促进非线性问题的收敛^[2]. 在 SIMPLE 算法中, 将多重网格用到外迭代中具有很好的收敛特性^[3], 然而当计算在不同疏密的网格上进行时, 对流项差分格式稳定性的问题更加突出. 比较早的文献一般采用一阶迎风或混合格式^[4,5], 但计算精度较低, 不能适应计算传热学的需要. 为了采用高阶格式, 文献中一般采用亏损修正 (defect correction)^[6,7] 或高阶组合格式 (SGSD) 如 MUSCL 等^[8]. 本文采用一种稳定性可保证的二阶差分格式 (SGSD), 同其他常用高阶格式进行了比较, 并通过顶盖驱动流动分析了该格式在将多重网格应用到 SIMPLE 算法中时的有效性和经济性, 得出了比较好的结果.

1 多重网格方法

1.1 多重网格的实施

将多重网格运用到 SIMPLE 算法中时, 采用完全逼近方式 (FAS), 对未知变量 φ 本身在几重网格上进行求解. 设离散方程具有以下形式

$$A\varphi = b \quad (1)$$

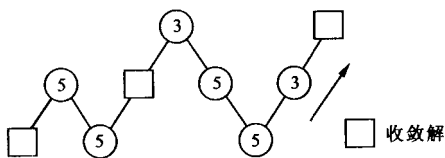
则从 k 重网格向 $(k-1)$ 重网格传递时, 在 $(k-1)$ 重网格上形成的是关于 k 重网格上正确值的一个近似值的方程, 即

$$A^{k-1}\varphi^{k-1} = b^{k-1} + I_k^{k-1}(b^k - A^k\varphi^k) + (A^{k-1}I_k^{k-1}\varphi^k - b^{k-1}) \quad (2)$$

由上式得出 φ^{k-1} 后, 应用延拓算子来获得 k 重网格上的改进值, 即

$$\varphi_{\text{new}}^k = \varphi_{\text{old}}^k + I_k^{k-1}(\varphi^{k-1} - I_k^{k-1}\varphi_{\text{old}}^k) \quad (3)$$

在应用多重网格时, 要确定在不同疏密程度的网格之间如何进行迭代循环, 本文中采用完全多重网格循环 (FMG), 其循环方式见图 1.



5、3 分别表示限定和延拓之后的迭代次数

图 1 FMG V(5,3) 循环

1.2 限定和延拓

多重网格程序包括 2 个部分, 即限定和延拓. 本文中限定算子和延拓算子均采用双线性插值, 具体的插值算子见文献[8]. 在限定和延拓之前进行的迭代次数用 $V(x_x, x_y)$ 表示, 其中 V 表示采用 V 循环方式进行光顺和延拓, x_x 表示从密网格通过限定算

子传递到下一级疏网格之前的迭代次数, x_y 表示从疏网格通过延拓算子传递到相邻的密网格之后的迭代次数, 本文分别取 x_x, x_y 为 5 和 3.

2 SGSD 格式的实施

文献[9]中提出了 SGSD 格式. 引入规正变量的定义^[10], 则 SGSD 格式可以表示为

$$\varphi_f^{\text{SGSD}} = \beta \left[\frac{\tilde{x}_f - \tilde{x}_c}{1 - x_c} + \frac{\tilde{x}_f - 1}{x_c - 1} \varphi_c \right] + (1 - \beta) \frac{\tilde{x}_f}{x_c} \varphi_c \quad (4)$$

式中: 下标 f 代表控制容积的界面位置; β 定义为

$$\beta = \frac{2}{(2 + |P_\Delta|)} \quad (5)$$

式中: P_Δ 是网格 Peclet 数.

由规正变量定义式可知, 界面变量 φ 可以改写为

$$\varphi = \varphi_f(\varphi_D - \varphi_U) + \varphi_U \quad (6)$$

式中: 下标 U, C, D 分别指位于流动方向的上游、中游及下游位置的 3 个相邻的点, 如图 2 所示.

本文在实施 SGSD 过程中采用延迟修正^[11]的方法, 则式(6)可以改写为

$$\varphi = \varphi_f^{\text{UD}} + [\varphi_f^{\text{SGSD}} - \varphi_f^{\text{UD}}]_{\text{old}} \quad (7)$$

控制方程离散形成的代数方程采用强隐方法 (SIP)^[12] 求解. 在 SIMPLE 外迭代的过程中, 对于动量方程, 只进行一次 SIP 内迭代, 而对于压力修正方程, 可以多进行几次 SIP 迭代 (本文中进行了 10 次迭代).

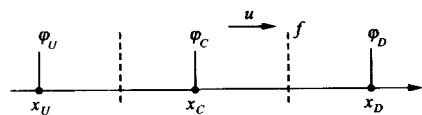


图 2 规正空间坐标定义图

3 经济性和有效性讨论

在这里主要讨论 SGSD 格式在同位网格 SIMPLE 算法中的经济性和有效性. 本文对二维方腔顶盖驱动流动进行了数值计算, 物理问题见文献[3], 并将结果与 SUD、MUSCL、SMART 以及 QUICK 等高阶格式在相同条件下进行了比较.

计算中采用非均分 4 重网格, 最稀网格数为 12×12 , 最密网格为 82×82 . 对于非均分网格, 相邻两重网格之间网格的步长比满足以下关系式^[13]

$$\eta_k = (\eta_{k-1})^{1/2} \quad (8)$$

所以在最密的网格层次上, 网格几乎近似为均匀网格, 计算中 Re 取为 1 000、2 000、3 000, 其定义为

$$Re = \frac{uH}{\nu} \quad (9)$$

式中: u 为顶盖移动速度; H 为方腔的高度; ν 为流动介质运动黏度。

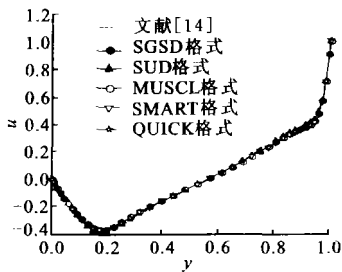
动量方程和压力修正方程的亚松弛因子分别为 0.5、0.2。迭代的收敛标准为所有方程的相对残余小于 10^{-6} 。

以文献[14]为基准解,表1、表2分别给出了非均匀网格条件下中心线上的速度 u 和速度 v 的相对误差,其相对误差的计算式为

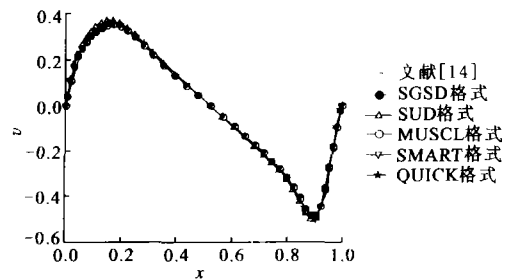
$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\varphi_{c,i} - \varphi_{ex,i}}{\varphi_{ex,i}} \right| \quad (10)$$

式中: φ 代表变量 u 和 v ; 下标 c 表示计算值, ex 表示基准解; N 为方腔中心线上的结点数。

当 $Re = 1000$ 时,从表1、表2中可以看出,SGSD格式的精度可以达到高阶组合格式 MUSCL 和 SMART 格式等的精度,在不同的网格层次上,SGSD格式的精度均超过了 MUSCL 和 SMART 格式,与 QUICK 格式相当,在 82×82 的网格上,其相对误差只有 0.56%,小于其他高阶格式。由以上所述可以看出,SGSD格式的精度在二阶精度以上。图3给出了5种格式在非均匀网格条件下中心线上的速度 u 和速度 v 的分布。



(a) 垂直中心线上($x = 0.5$)速度 u 的分布



(b) 水平中心线上($y = 0.5$)速度 v 的分布

图3 不同高阶格式的精度比较($Re = 1000$,非均匀网格(82×82))

表1 5种高阶格式的非均匀网格下 x 为 0.5 时速度 u 的相对误差 %

网格数	SGSD	SUD	MUSCL	SMART	QUICK
12×12	35.2898	35.1736	40.3659	40.4767	36.1337
22×22	14.6098	10.3198	16.3980	16.7254	14.6023
42×42	3.6297	2.9939	3.3315	3.4782	3.3305
82×82	0.5596	1.3822	0.7762	0.8554	0.8828

表2 5种高阶格式的非均匀网格下 y 为 0.5 时速度 v 的相对误差 %

网格数	SGSD	SUD	MUSCL	SMART	QUICK
12×12	45.3364	54.0658	46.4266	46.1399	49.6590
22×22	22.1892	21.3392	23.5564	23.3515	21.8830
42×42	6.5539	6.0627	6.9328	6.7791	6.3697
82×82	1.0580	1.8374	1.1259	1.0664	1.0279

表3给出了在非均匀网格条件下5种格式的收敛时间和迭代次数,表中的数据以SUD格式在 $Re = 1000$ 时所需要的时间为基准。当 $Re = 1000$ 时,5种格式的收敛时间差不多,随着 Re 的增大,SGSD格式的收敛时间远远快于其他的格式,当 Re 为 3000 时,MUSCL 与 SMART 格式在给定的迭代次数下不能达到收敛,SGSD的收敛速度是SUD的 1.77 倍,是 QUICK 的 1.37 倍。表4给出了SGSD格式在单重网格与完全多重网格循环下的比较,可以看出,使用完全多重网格可以大大加快收敛速度。在 82×82 的网格层次上,单重网格(SG)的迭代时间是多重网格的 5 倍以上,随着雷诺数的增大,多重网格的优势越发明显。

4 结论

(1) 在非均匀网格下,SGSD格式可以得到与其他高阶格式以及高阶组合格式相同的计算精度,收敛速度要高于其他高阶格式。

(2) SGSD格式具有较好的经济性和有效性,在不同的网格层次上,可以保证计算的稳定。

(3) 采用多重网格加速 SIMPLE 算法的迭代时,由于在不同的疏密网格上进行迭代求解,因此不仅要考虑多重网格的循环方式,还要考虑对流项离

表 3 5 种高阶格式的迭代次数和迭代时间

Re	网格数	外迭代次数					t _{cpu} /s				
		SGSD	SUD	MUSCL	SMART	QUICK	SGSD	SUD	MUSCL	SMART	QUICK
1 000	12×12	98	98	93	259	107					
	22×22	148	151	148	155	169	1.20	1.00	1.34	1.47	1.13
	42×42	113	87	135	127	113					
	82×82	64	57	71	68	64					
2 000	12×12	117	112	118	800	138					
	22×22	206	211	212	1 400	260	1.55	2.08	2.88	3.73	1.88
	42×42	190	176	242	250	200					
	82×82	71	134	149	131	106					
3 000	12×12	125	120	*	*	156					
	22×22	233	236	*	*	319	1.97	3.48	*	*	2.70
	42×42	269	288	*	*	283					
	82×82	85	211	*	*	142					

注: * 表示不能达到收敛标准.

表 4 SGS格式单重网格与多重网格的比较

Re	网格数	N			t _{cpu} /s		
		SG	FMG	N _{SG} /N _{FMG}	SG	FMG	t _{SG} /t _{FMG}
1 000	12×12	98	98	1.000	0.063	0.063	1.000
	22×22	209	148	1.412	0.250	0.218	1.146
	42×42	332	113	2.938	1.219	0.922	1.322
	82×82	696	64	10.875	12.17	2.280	5.338
2 000	12×12	117	117	1.000	0.078	0.078	1.000
	22×22	297	206	1.442	0.266	0.266	1.000
	42×42	598	190	3.147	2.313	1.359	1.702
	82×82	992	71	13.972	17.550	2.940	5.969

注: N 为迭代次数.

散格式.

参考文献:

[1] Patankar S V. Numerical heat transfer and fluid flow [M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[2] Shyy W, Thakur S S, Ouyang H, et al. Computational techniques for complex transport phenomena [M]. New York: Cambridge University Press, 1997.

[3] 张 玮, 王 元. 多重网格技术在 SIMPLE 内外迭代中的应用 [J]. 西安交通大学学报, 2001, 35(7): 670-674.

[4] Sivaloganathan S, Shaw G J. A multigrid method for recirculating flows [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1988, 8(4): 417-440.

[5] Vanka S P. Fast numerical computation of viscous flow in a cube [J]. Numerical Heat Transfer: Part B, 1991, 20(2): 255-261.

[6] Gjesdal T, Lossius M E H. Comparison of pressure correction smoothers for multigrid solution of incom-

pressible flow [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1997, 25(4): 393-405.

[7] 陶文铨. 数值传热学 [M]. 第二版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001. 290.

[8] Lien F S, Leschziner M A. Multigrid acceleration for recirculating laminar and turbulent flows computed with a non-orthogonal, collocated finite volume scheme [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118(3): 351-371.

[9] Li Z Y, Tao W Q. A new stability-guaranteed second order difference scheme [J]. Numerical Heat Transfer: Part B, 2002, 42(4): 349-365.

[10] Leonard B P. Simple high accuracy resolution program for convective modeling of the discontinuities [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1988, 8(10): 1291-1318.

[11] Hayase T, Humphery J A C. A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite volume iterative calculation procedure [J]. Journal Computational Physics, 1992, 98(1): 108-118.

[12] Stone H L. Iteration solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations [J]. SIAM Journal Numerical Analysis, 1968, 5(3): 530-558.

[13] Hortmann M, Peric M, Scheuerer G. Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: benchmark solutions [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1990, 11(2): 189-207.

[14] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High Re solutions for incompressible flow using the Navier Stokes equations and a multigrid method [J]. Journal Computational Physics, 1982, 48(3): 387-411. (编辑 王焕雪)