

格子 — BOLTZMANN 方法 非均分网格的实施

李明秀 陶文铨 何雅玲 王秋旺

(西安交通大学能源与动力工程学院, 陕西 西安 710049)

摘要 本文提出了格子 — Boltzmann 方法的一种新的插值算法, 使得网格划分与微观粒子运动方向相分离; 用该方法模拟了后台阶通道内的突扩流动和二维极坐标下的空腔流。所得结果与传统方法吻合良好, 证明了该方法的可行性。

关键词 格子 — Boltzmann 方法; 非均分网格; 极坐标

中图分类号: TK124 文献标识码: A 文章编号: 0253-231X(2003)01-0073-03

LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR NON-UNIFORM MESH GRID

LI Ming-Xiu TAO Wen-Quan HE Ya-Ling WANG Qiu-Wang

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract In this paper, we proposed a new interpolation strategy, where the computational grid and the momentum lattice are two different mesh systems, and the density distribution function can be calculated by interpolation. Using this strategy, we simulated the flow in a 2D symmetric sudden expansion channel and the lid driven cavity flow in polar coordinates. The results agree well with the traditional method, indicating the feasibility of this strategy.

Key words lattice-Boltzmann method; non-uniform mesh; polar coordinates

1 引言

格子 — Boltzmann 方法以分子运动论为基础, 因而保持了分子动力学的种种优点, 在模拟复杂流动和换热方面有着很大的潜力^[1,2]。但它的一些固有的缺点, 如计算量大, 网格划分必须是对称均匀(正六边形, 正方形)使其应用受到限制。

文献[3,4]中分别提出了与有限容积法和有限差分法相结合非均匀网格算法, 文献[5]中首次提出了插值的思想, 并成功地模拟了绕流圆柱的问题。本文再次应用插值的思想模拟了后台阶通道内的突扩流动和二维极坐标下的空腔流。

2 数值方法简介

2.1 基本思想

采用任何适宜的坐标系(包括适体坐标)划分网格, 给定初值, 然后在网格节点上按常规 LBGK 方程进行演化。即:

$$f_i(x+c_i, t+1) = f_i(x, t) - \frac{1}{\tau_m} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)] \quad (1)$$

收稿日期: 2002-01-08; 修订日期: 2002-11-30

基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目(No: G2000026303); 国家自然科学基金资助项目(No.50076034)

作者简介: 李明秀(1978-), 女, 山西洪洞人, 硕士研究生, 主要从事强化传热和数值计算方面的研究。

由于网格划分与速度离散不一致, 所以 $x + c_i$ 的位置不一定在节点上。那么在下一时刻网格节点上的密度分布函数 $f_i(x, t+1)$ 需要由 $f_i(x+c_i, t+1)$ 插值来得到。插值以后, 求出网格节点上的密度和宏观速度, 就可以进入下一时层的迭代。

2.2 求解步骤

(1) 划分网格。选取适当的曲线坐标系 (ξ, η) , 使得在 (ξ, η) 平面上网格为正方形(正方形网格主要为了插值方便)。取坐标变换 $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ 得到网格节点的直角坐标 $r(x, y)$;

(2) 给定网格节点上的宏观量 ρ , u 和密度分布函数的初值 $f_i(x, 0)$;

(3) 在 (x, y) 平面上按照 LBGK 方程进行演化, 得到 $f_i(x+c_i, t+1)$;

(4) 在 (ξ, η) 平面上插值。坐标变换 $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ 有逆变换 $\xi^x = \xi(x, y)$, $\eta^y = \eta(x, y)$ 。与 $x + c_i$ 相对应的 (ξ, η) 平面上的坐标为 (ξ_i^x, η_i^y) : $\xi_i^x = \xi(x + c_i)$, $\eta_i^y = \eta(y + c_i)$ 。在 (ξ, η) 平面上寻找与 (ξ_i^x, η_i^y) 最接近的网格节点 (ξ^x, η^y) : $\xi^x = \xi(x)$, $\eta^y =$

$\eta(y)$ 。取 $d\xi = \xi^x - \xi_i^x, d\eta = \eta^y - \eta_i^y$, 于是有如下的插值公式:

$$f_i(x, t+1) = \sum_{k=0}^2 \sum_{l=1}^2 a_{m,k} b_{n,l} f_i(\xi_{m+k \cdot md}^x, \eta_{n+l \cdot nd}^y, t+1) \quad (2)$$

其中 $md = \text{sign}(1, d\xi), nd = \text{sign}(1, d\eta)$, 由它们来确定选取的插值节点。采用二次抛物线插值的插值系数为:

$$\begin{aligned} a_{m,0} &= \frac{(|d\xi| - \Delta\xi)(|d\xi| - 2\Delta\xi)}{2\Delta\xi^2} \\ a_{m,1} &= \frac{|d\xi|(|d\xi| - 2\Delta\xi)}{\Delta\xi^2} \\ a_{m,2} &= \frac{|d\xi|(|d\xi| - \Delta\xi)}{2\Delta\xi^2} \\ b_{n,0} &= \frac{(|d\eta| - \Delta\eta)(|d\eta| - 2\Delta\eta)}{2\Delta\eta^2} \\ b_{n,1} &= \frac{|d\eta|(|d\eta| - 2\Delta\eta)}{\Delta\eta^2} \\ b_{n,2} &= \frac{|d\eta|(|d\eta| - \Delta\eta)}{2\Delta\eta^2} \end{aligned}$$

其中 $\Delta\xi$ 和 $\Delta\eta$ 为 (ξ, η) 平面上的网格步长。

求出宏观参数后, 就可以反复循环第三、四步, 直到迭代收敛。与常规的格子-Boltzmann 方法相比, 增加了插值一步, 但由于插值系数可以在赋初值以后算出, 以后各步迭代不需要重复计算, 故计算时间增加不是很多。

3 数值模拟与结果分析

3.1 后台阶通道突扩流动

3.1.1 网格划分 对图 1 所示的突扩通道内的流动问题进行数值模拟。在入口处用较密的网格, 而在出口处采用较稀的网格, 从而节省计算时间。网格划分如图 2 所示, 因为它本身是在直角坐标系下的区域, 故不需要坐标变换; 并且由于网格在 Y 方向是均匀的, 故只在 X 方向上需要插值, 本例采用的是一维三点二次抛物线插值。

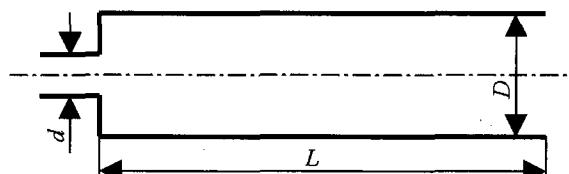


图 1 突扩通道图示 ($D = 8d$)

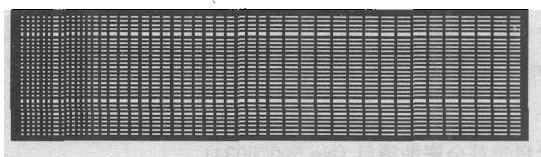


图 2 网格划分

3.1.2 边界条件的处理 入口截面上 u 速度为抛物线分布, v 速度为 0。出口截面上速度取局部单向化^[6], 压力为给定值 $\bar{p} = \bar{\rho}c_s$ 。其中 c_s 为音速, 对于本文所选的计算模型^[1], $c_s = \sqrt{1/3}$ 。壁面上采用无滑移边界条件。在 Re 较大的情况下, 通道内的流动不再呈上下对称的分布, 取通道尺寸 $L = 8D$ 。

3.1.3 结果讨论 本文对突扩通道在 $Re=10, 30, 60, 100, 200, 400$ 六种情况下的流场进行了数值模拟。图 3、图 4 分别为 $X = L/6$ 和 $X = L/2$ 的截面上的无量纲速度 U/U_w 沿 Y 方向的分布。可以看出, Re 数较低时, 通道内的流场呈上下对称, 无量纲速度 U/U_w 沿 Y 方向的分布为抛物线分布; 但随着 Re 数的增加, 上下流场不对称的趋势越来越明显。由图 5 可以看出, 随着 Re 数的增加, 沿通道的中心线无量纲速度 U/U_w 出现负值。图 6 为不同 Re 数下通道内流场的示意图, 与文献[7]中的实验与计算结果基本一致, 表明了插值方法的正确性与可行性。

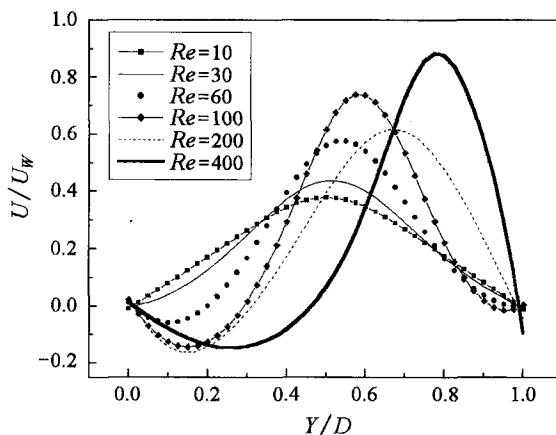


图 3 在 $X = L/6$ 的截面上, 无量纲速度 U/U_w 沿 Y 方向的分布

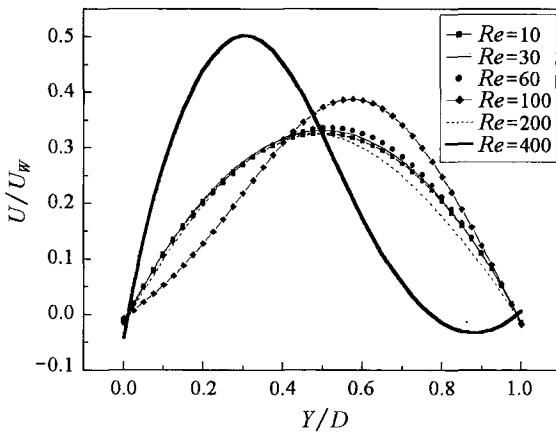


图 4 在 $X = L/2$ 的截面上, 无量纲速度 U/U_w 沿 Y 方向的分布

3.2 二维极坐标下的空腔流

本文以极坐标下的空腔流动来阐述了插值方法的应用, 其思路可以推广到任意曲线坐标系。

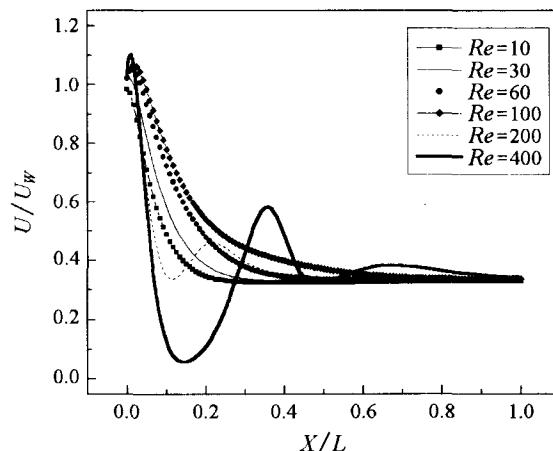


图 5 无量纲速度 U/U_W 沿通道对称的分布

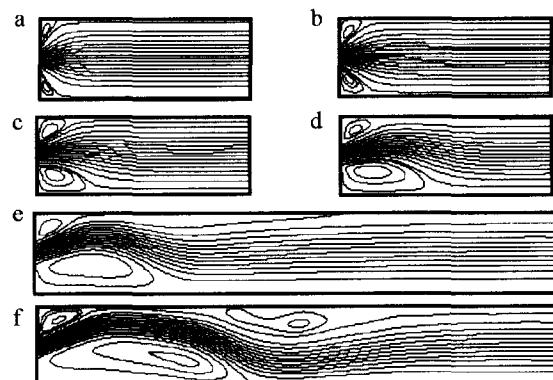


图 6 各种 Re 数下的流线图

a $Re = 10$ b $Re = 30$ c $Re = 60$
 d $Re = 100$ e $Re = 200$ f $Re = 400$

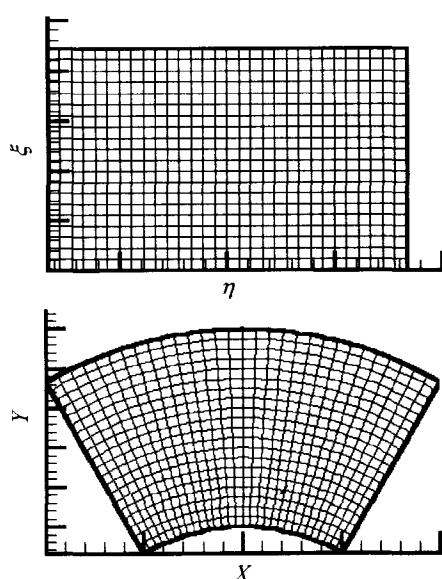


图 7 两套坐标系下的网格划分

3.2.1 网格划分 如图 7 所示, 在 (ξ, η) 平面上为均分网格, 取坐标变换 $r = a + \xi, \theta = \pi(1 - \eta)$ 。那么在直角坐标系下有 $x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$ 。有了这两套网格系统, 就可以按照前述方法进行迭代、插值计算。

3.2.2 结果 通过对 $Re=100, 400, 1000, 2000$ 四种情况下流场的数值模拟, 可以看出, 插值方法与格子-Boltzmann 方法相结合, 得到的结果与文献 [8] 中用传统的有限差分法的结果非常一致 (图 8)。进一步表明本文的方法可以应用于曲线坐标系。

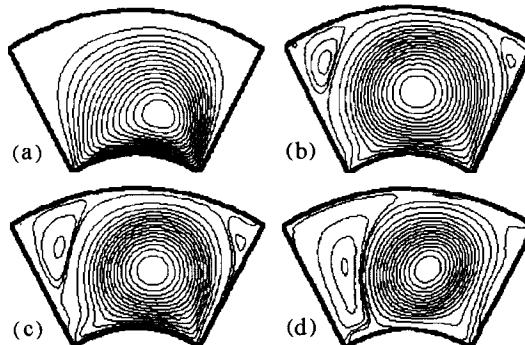


图 8 不同 Re 数下空腔内的流线图

(a) $Re = 100$ (b) $Re = 400$ (c) $Re = 1000$ (d) $Re = 2000$

4 结 论

本文采用插值方法, 成功地用格子-Boltzmann 方法模拟了后台阶的突扩流动和二维极坐标下的空腔流, 拓宽了格子-Boltzmann 方法的应用领域。

参 考 文 献

- [1] 李明秀, 陶文铨, 王秋旺. LATTICE-BOLTZMANN 方法及其在顶盖驱动流数值模拟中的应用. 工程热物理学报, 2001, 22(2): 201-203
- [2] 李明秀, 王秋旺, 何雅玲等. 用格子-BOLTZMANN 方法求解方腔自然对流. 东北大学学报(自然科学版). 2001, 22(增刊): 45-48
- [3] Haowen Xi, Gongwen Peng, So-Hsiang Chou. Finite-volume Lattice Boltzmann Method. Phys Rev E, 1999, 59(5): 6202-6205
- [4] Renwei Mei, Wei Shyy. On the Finite Difference-based Lattice Boltzmann Method in Curvilinear Coordinates. J. Comput. Phys., 1998, 143: 426-448
- [5] Xiaoyi He, Gary Doolen. Lattice Boltzmann Method on Curvilinear Coordinates System: Flow Around a Circular Cylinder. J. Comput. Phys., 1997, 134: 306-315
- [6] 陶文铨. 数值传热学. 第二版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001. 232-237
- [7] R M Fearn, T Mullin, K A Cliffe. Nonlinear Flow Phenomena in Symmetric Sudden Expansion. J. Fluid Mech., 1990, 211: 595
- [8] L Fuchs, N Tillmark. Numerical and Experimental Study of Driven Flow in a Polar Cavity. Int. J. Num. Meth. Fluids, 1985, 5: 311-329