

# 二维平板通道中流动与传热的格子 - Boltzmann 模拟

唐桂华 何雅玲 伍华荣 陶文铨

(西安交通大学能源与动力工程学院, 陕西 西安 710049)

**摘要** 格子 -Boltzmann 数值模拟方法 (LBM) , 在最近十几年来得到迅速发展。本文发展了 LBM 的流动与传热模型, 并对二维平板通道中的流动与传热进行了模拟, 采用密度分布函数得到速度场, 用单独的内能分布函数得到温度场, 并与传统 FVM 方法所得到的多个特征量结果进行了比较, 模拟结果与 FVM 解均吻合很好。鉴于 LBM 边界条件处理简单和易于实施等特点, 该方法可望成为求解流动与传热的一种有效数值模拟手段。

**关键词** 格子 -Boltzmann; 对流传热; 数值模拟

中图分类号: TK124 文献标识码: A 文章编号: 0253-231X(2003)06-0995-03

## FLUID FLOW AND HEAT TRANSFER IN A PLANE CHANNEL USING LATTICE BOLTZMANN METHOD

TANG Gui-Hua HE Ya-Ling WU Hua-Rong TAO Wen-Quan

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract** The recent development of the lattice Boltzmann method (LBM) has provided a new simulation tool for computational fluid dynamics and numerical heat transfer. Forced convective flow and heat transfer between two parallel plates are studied using LBM in this paper. The velocity field is simulated using density distribution function while an internal energy distribution function is introduced to simulate the temperature field. The results agree well with data using traditional finite volume method (FVM) and analytical solution. The present work indicates that LBM may be developed as a promising method for predicting fluid flow and heat transfer because of its many inherent advantages.

**Key words** lattice-boltzmann; convective heat transfer; numerical simulation

## 1 前言

格子 -Boltzmann 方法 (LBM) 在近十几年来得到了很大的发展, 该模型基于对流体的微观描述, 把流场离散成规则的格子, 假设流体粒子沿格线运动并在格点上相互作用, 最终模拟流体的宏观行为。它具有边界条件易于处理, 程序设计简单, 适合大规模并行计算等优点, 因此日益受到研究者的重视。最早提出的 LBM 方法<sup>[1]</sup> 只能用来求解等温流动场, 它通过密度分布函数演化得到流场中的宏观速度分布。后来又有研究者首先采用多速热流体模型成功实现了 LBM 对传热问题的模拟, 目前对换热问题求解思路主要有 3 种。

最早提出的方式是采用多速模型<sup>[2~4]</sup>(如 13 速或 21 速等), 将内能融合在密度分布函数中, 演化求解得到速度和温度场, 该方法的缺点是数值稳定性很差; 随后提出了将能量方程和动量方程联立<sup>[5,6]</sup>, 能量方程的形式与动量方程完全相同, 只是未知量是标量而非矢量, 该方法的缺点是不能解决压缩功和耗散热问题; 而第三种方法引入内能分布函数<sup>[7]</sup>, 用密度分布函数演化得到速度分布, 而用单独的内能分布函数演化得到温度场, 该方法具有与非热流体格子相当的计算稳定性, 而且从根本上解决了压缩功和耗散热问题。本文采用这种热流体模型, 对二维平板间流动与传热进行了模拟并与有限容积法模拟结果及经典解进行了比较。

收稿日期: 2002-12-16; 修订日期: 2003-09-24

基金项目: 国家 973 重点基础研究发展规划资助项目 (No.G2000026303); 自然科学基金项目资助 (No.50076034)

作者简介: 唐桂华 (1974- ), 男, 湖南衡阳人, 在职博士研究生, 主要从事传热强化, 微尺度流动与换热以及 LBM 方法研究。

## 2 LBM 数值方法简介

### 2.1 内能分布函数及其演化方程

在 LBM 方法中, 借助统计方法, 流体的宏观参数如下定义:

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_i f_i & \rho \mathbf{u} &= \sum_i f_i \mathbf{c}_i \\ \rho e &= \sum_i \frac{1}{2} f_i (\mathbf{u} - \mathbf{c}_i) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{c}_i)\end{aligned}\quad (1)$$

流体的温度通过比内能  $e$  来实现, 引入内能分布函数  $g$ ,

$$g = \frac{1}{2} f_i (\mathbf{u} - \mathbf{c}_i) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{c}_i) \quad (2)$$

密度分布函数演化方程,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) f = -\frac{1}{\tau_v} (f - f^{eq}) \quad (3)$$

内能分布函数演化方程,

$$\frac{\partial g}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) g = -\frac{1}{\tau_e} (g - g^{eq}) - f q \quad (4)$$

$q$  为单位质量流体在速度方向上的热流通量,

$$q = (\mathbf{c} - \mathbf{u}) \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] \quad (5)$$

### 2.2 LBGK 模型离散形式

将密度分布函数及内能分布函数在时间、空间上分别离散得到,

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_v} [f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{r}, t)] \quad (6)$$

$$g_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = g_i(\mathbf{r}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_e} [g_i(\mathbf{r}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{r}, t)] - f_i q_i \Delta t \quad (7)$$

其中  $q_i$  的表达式<sup>[8]</sup>,

$$q_i = [\mathbf{c}_i - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] \quad (8)$$

驰豫时间  $\tau_v$  和  $\tau_e$  分别与流体的运动黏度  $\nu$  和导温系数  $a$  相联系,

$$\tau_v = \frac{1}{2} + \frac{3\Delta t}{\Delta x^2} \nu \quad \tau_e = \frac{1}{2} + \frac{3\Delta t}{2(\Delta x^2)} a \quad (9)$$

### 2.3 D2Q9 模型平衡态分布函数

本文计算采用 D2Q9 模型, 由于篇幅限制, 该模型粒子格点分布、格点各个方向粒子速度以及平

衡态密度分布函数参见文献 [9]。平衡态内能分布函数为<sup>[7]</sup>,

$$g_i^{eq} = \begin{cases} -\frac{2\rho e}{3} \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}), & i = 0 \\ \frac{\rho e}{9} \left[ \frac{3}{2} + \frac{3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})}{2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2} - \frac{3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{2} \right], & i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{\rho e}{36} \left[ 3 + 6(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2} - \frac{3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}{2} \right], & i = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (10)$$

## 3 数值模拟结果分析

### 3.1 物理问题及边界条件

本文对两平行平板间进出口不可压缩流动进行了流动与传热模拟。进口流体给定均匀速度及均匀温度, 上下固体壁面均保持恒定温度, 而且温度相同。出口密度给定, 并且出口边界假设速度与温度充分发展。对于上下固体壁面, 速度边界和温度边界采取强制平衡态分布。特征尺度取 2 倍平板间宽度。模拟过程中相关已知参数有:  $Re = 10$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $T_{in} = 20$ ,  $\rho_{out} = 1.2$ ,  $U_{in} = 0.01$ ,  $T_w = 10$ 。

### 3.2 速度场及温度场分析

图 1 是流动方向各纵向截面向无量纲速度分布, 其中实线是用有限容积法 (FVM) 模拟得到的结果, 两种数值模拟方法所得到的结果吻合很好。图 2 表示了流道中心线截面无量纲速度分布, 从进口段开始, 流速急剧增加, 大约在  $X = 0.3$  时进入充分发展状态, 这时速度保持恒定, 无量纲数值与经典解数值 1.5 几乎没有差别。图 3 表示从进口到出口, 各截面的平均密度分布。由图可知, 在进口段由于进口效应, 密度降低比例较大, 而随后成线性降低。从进口到出口, 由于流动阻力原因, 压力逐渐降低, 但总的来说, 密度数值变化较小, 所以仍然满足不可压缩流体流动条件。图 4 是从进口截面到出口截面摩擦阻力分布图。由图上可知, 流动入口段

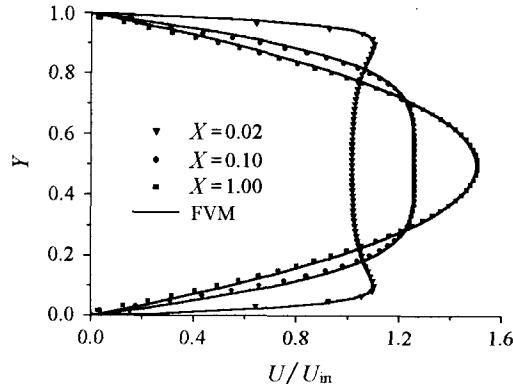


图 1 截面无量纲速度分布图

由于要克服把入口均匀流加速成 Poiseuille 抛物线分布所需的附加阻力损失, 所以摩擦阻力比较大, 到充分发展后,  $fRe$  值固定在 95.8, 与经典解数值 96 仅相差 0.2%。

图 5 是流动方向纵向截面无量纲温度分布, 其

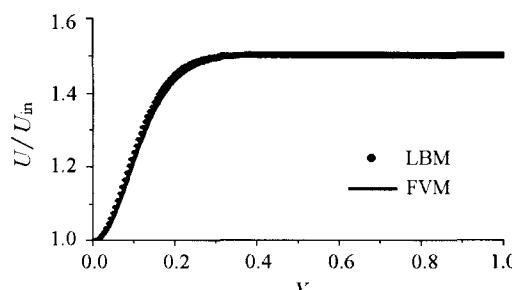


图 2 流道中心线截面无量纲速度分布图

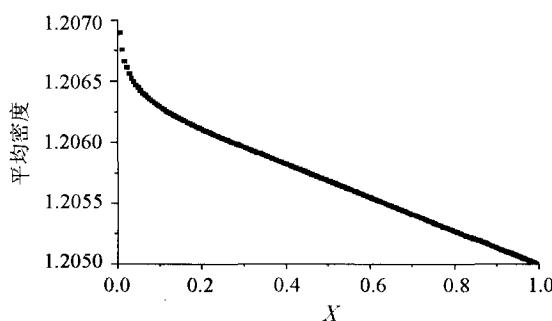


图 3 截面平均密度分布图

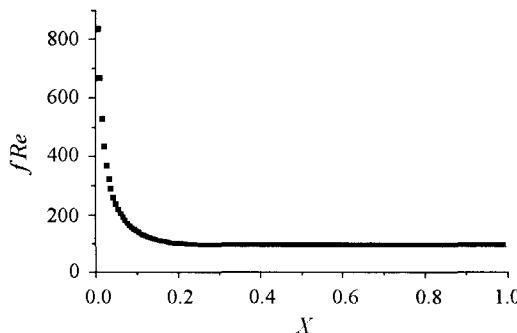


图 4 阻力损失分布图

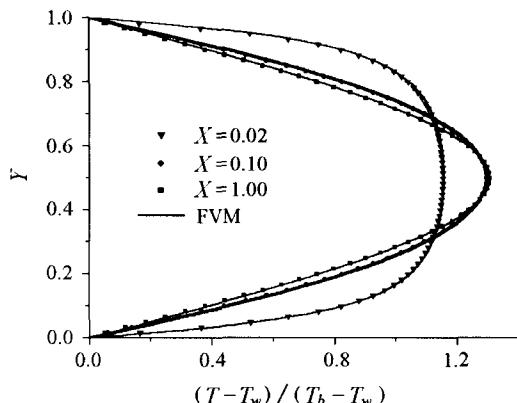


图 5 截面无量纲温度分布图

中实线是用有限容积法 (FVM) 模拟得到的结果。从图上知道, 两种数值模拟方法所得到的结果也吻合非常好。表 1 是应用 LBM 对三种热边界条件求解得到的 Nusselt 数, 表中可见, LBM 方法得到的 Nusselt 数与真解还有一定误差, 分析主要原因在如何选择合适的温度边界条件, 目前正在积极进行高阶温度边界条件的探索。

表 1 三种热边界条件下 Nusselt 数

热边界条件	上下壁均匀温度且相等	上下壁均匀温度但不等	上壁均匀温度下壁绝热
本文结果	7.2	3.9	4.5
经典解	7.54	4.0	4.86
相对偏差	4.5%	2.5%	7.4%

## 4 结 论

本文应用格子-Boltzmann 方法的热流体模型, 对平板间的流动与换热进行了模拟并与有限容积数值方法得到的结果进行了详细的分析比较, 求解结果吻合良好。由于 LBM 具有多种优点, 这进一步表明该方法可望成为求解流动与传热的一种有效数值模拟手段。

## 参 考 文 献

- [1] McNamara G, Zanetti G. Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata. Phys. Rev. Lett., 1988, 61(20): 2332-2335
- [2] McNamara G, Alder B. Analysis of the Lattice Boltzmann Treatment of Hydrodynamics. Physica A, 1993, 194(1-4): 218-228
- [3] Alexander F G, Chen S, Sterling J D. Lattice-Boltzmann Thermodynamics. Phys. Rev. E., 1993, 47(4): 2249-2252
- [4] Chen Y, Ohashi H, Akiyama M. Thermal Lattice Bhatatnagar-Gross-Krook Model Without Nonlinear Deviations in Macrodynamic Equations. Phys. Rev. E., 1994, 50(4): 2776-2783
- [5] Shan X. Simulation of Rayleigh-Benard Convection Using a Lattice Boltzmann Method. Phys. Rev. E., 1997, 55(3): 2780-2788
- [6] Eggels J G M, Somers J A. Numerical Simulation of Free Convective Flow Using the Lattice Boltzmann Scheme. J. Heat Fluids Flow, 1995, 16(20): 357-364
- [7] He X Y, Chen S Y, Doolen G D. A Novel Thermal Model for the Lattice Boltzmann Method in Incompressible Limit. J. Comput. Phys., 1998, 146(1): 282-300
- [8] Hu X J, Du J H, Wang B X. Numerical Simulation of Convective Heat Transfer Across a Heated Cylinder by Lattice-Boltzmann Method. In: Bu-Xuan Wang, Ed. Heat Transfer Science and Technology 2000. Beijing: Higher Education Press, 2000. 459-464
- [9] 陶文铨. 计算传热学及其近代进展. 北京: 科学出版社, 2000. 417-427