

文章编号: 1671-8097(2003)01-0090-04

# 密网格下SIMPLE等四种 算法的收敛性与健壮性的比较

曾 敏, 陶文铨

(西安交通大学 能源与动力工程学院, 陕西 西安 710049)

**摘要:** 实施了SIMPLEX算法; 该算法主要是通过求解方程组来确定速度修正系数 $d_u, d_v$ , 用所求得的 $d_u, d_v$ 来确定压力修正方程的系数和修正速度。通过对四个典型的流动换热问题在密网格中的计算, 将SIMPLEX与SIMPLE、SIMPLEC、SIMPLER进行了比较; 在相同的条件下比较了它们的计算精度、计算时间以及健壮性。结果表明, 与现有文献中结论不相同, SIMPLEC算法的综合性能较好。

**关键词:** SIMPLE系列算法; 流动与传热问题; 数值模拟; 健壮性

**中图分类号:** TK124 **文献标识码:** A

## 0 引言

SIMPLE算法自1972年由Patankar和Spalding提出以来<sup>[1]</sup>, 在计算流体动力学和数值传热学领域得到了广泛的应用, 同时也得到了不断的改进与发展, 相继提出了SIMPLER<sup>[2,3]</sup>、SIMPLEC<sup>[4]</sup>和SIMPLEX<sup>[5]</sup>等算法。目前, SIMPLE系列算法不仅在不可压缩流体Navier-Stokes方程的数值求解中广为应用, 并且也被成功地应用于可压缩流体流场的数值计算中。

Raithby等<sup>[5]</sup>在1985年提出SIMPLEX算法时, 认为与SIMPLEC相比SIMPLEX算法的主要优点是在密网格下其收敛特性较好, 最近文献<sup>[6]</sup>对近十种属于SIMPLE系列的算法作了统一的表述, 也特别指出只有SIMPLEX算法考虑了密网格时的收敛特性。作者发现1985年发表的文献<sup>[5]</sup>中所谓的密网格只是 $25 \times 25$ 这样的网格, 在计算机技术发展今天的条件下, 这种网格已远远不能作为密网格来看待。于是就产生了这样的问题, 文献<sup>[5,6]</sup>中对SIMPLEX算法的收敛特性所作出的评价是否还成立? 本文把密网格定在 $100 \times 50 \sim 100 \times 100$ 这样的层次上, 重新考察比较了SIMPLE、SIMPLEC、SIMPLER和SIMPLEX

的收敛特性, 得出了与文献<sup>[5,6]</sup>不同的结论。

## 1 SIMPLE系列算法概述

在Navier-Stokes方程的求解方法中, SIMPLE系列的方法属于以压力为基本变量的原始变量法。关于SIMPLE、SIMPLER、SIMPLEC及SIMPLEX等算法的实施步骤在文献<sup>[7]</sup>中有详细的介绍。本文开发实施了SIMPLEX算法程序, 对方腔顶盖驱动流、圆管突扩通道内的流动以及方腔内自然对流三个问题考核了程序的正确性。关于SIMPLEX可参见文献<sup>[5~8]</sup>, 为节省篇幅, 本文开发的SIMPLEX程序正确性的考核结果从略。本文对比的四种算法的程序中, 对流项与扩散项的离散均采用乘方格式。

## 2 四种不同算法的比较

作者对圆管突扩通道内的流动、方腔内自然对流、二维环腔顶盖驱动流及环形空间的自然对流四个层流流动与换热问题对比了四种算法的收敛特性及健壮性。上述四个问题的示意图及控制方程文献<sup>[8]</sup>中有详细的描述; 对于自然对流, 引入Boussinesq假设。

在比较SIMPLE、SIMPLER、SIMPLEC以及SIMPLEX这四种算法的收敛特性时, 采用的

收稿日期: 2002-11-19; 修回日期: 2002-12-10.

基金项目: 国家重点基础规划资助项目(G2000026303); 国家自然科学基金资助项目(50096034).

作者简介: 曾 敏(1976-), 男, 博士生; 陶文铨(1939-), 教授, 博士生导师.

收敛判据为整个求解区域内动量方程余量范数与参考动量之比小于一定值<sup>[7]</sup>,即

$$\left( \sum_{\text{内点求和}} \left\{ a_c u_c - \left[ \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b + A_c (p_P - p_E) \right] \right\}^2 \right)^{1/2} / \rho u_m^2 \leq \epsilon \quad (1)$$

式中： $u_c$ 、 $u_{nb}$  为主控制容积速度及其邻点速度， $u_m$  为平均流速，单位均为 m/s； $a_c$ 、 $a_{nb}$  为动量方程离散的系数； $b$  为不包括压力在内的源项中的常数部分； $A_c$  是压力差的作用面积， $m^2$ ； $p_P$ 、 $p_E$  为节点压力，Pa； $\epsilon$  为允许的相对偏差。

同时控制容积的最大不平衡质量的相对值应小于一定值。对于开口系统可以取入口的动量、质量流量为参考动量或参考质量；对于闭口系统，可以取流场中任一截面动量与质量流量做数值积分，取积分平均作为参考动量或质量。

2.1 收敛性的比较结果

采用上述的收敛判据时，分别计算了U方程和V方程的整个求解区域内方程余量范数与参考动量之比，取二者之间的最大值作为控制收敛的条件。分别计算了上面所提及的四个典型的流动和换热问题，在计算时速度、温度的松弛因子 $\alpha$

均取为 0.8, SIMPLE 的压力的松弛因子取为 0.3。计算结果表明：在相同的收敛条件下，四种算法所计算的结果完全一样；但就计算时间而言，SIMPLER 是最多的，其次一般是 SIMPLEX、SIMPLE 和 SIMPLEC 所需的时间差不多。为了节省篇幅仅提供两个问题收敛性的比较结果。

2.1.1 二维环腔顶盖驱动流

在该问题的计算中，以U、V动量方程余量范数之间的最大值小于  $1.0 \times 10^{-5}$  作为收敛的判据，在达到该收敛判据时，连续性方程节点余量的最大绝对值与参考质量流量之比的最大值为  $5.4 \times 10^{-8}$ ，表明连续性方程已很好满足。图1给出的结果是  $Re = 60$  时，在网格密度为  $64 \times 64$  时计算的中间截面的径向速度 ( $u_r$ ) 和切向速度 ( $u_\theta$ )，四种算法的计算结果完全一样，与文献[9]中的实验结果符合很好。SIMPLER 收敛所需的时间总是最多的，其次是 SIMPLEX。在网格密度为  $82 \times 82$  及  $102 \times 102$  时所得的结论也是相同的。

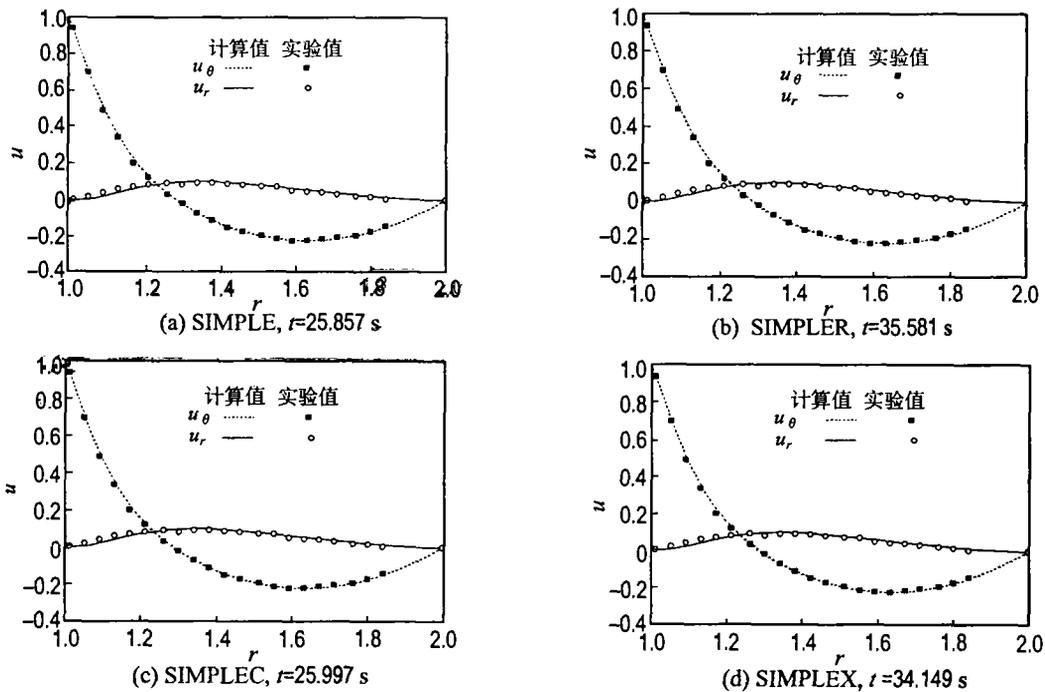


图1 二维环腔顶盖驱动流 ( $Re = 60$ , 网格  $64 \times 64$ )

Fig. 1 Driven flow in a two-dimensional polar cavity ( $Re = 60$ , Grid:  $64 \times 64$ )

2.1.2 环形空间的自然对流

在该问题的计算过程中，对于不同的网格密度，所采用的收敛条件也不一样。表1中按照网格由疏到密依次收敛条件分别为  $\epsilon = 1.0 \times 10^{-5}$ ,

$2.0 \times 10^{-5}$ ,  $2.0 \times 10^{-4}$  和  $2.0 \times 10^{-4}$ 。计算收敛时，连续性方程节点余量的最大绝对值与参考质量流量之比的最大值为  $5.9 \times 10^{-6}$ ，表明连续性方程已满足。同样可以发现，四种算法计算内壁的

平均当量导热系数完全一致。SIMPLER 所需的计算时间总是最多的,除了网格密度为  $42 \times 42$  时,在其它网格密度下 SIMPLE 所需的计算时间最少,其次为 SIMPLEC。

表 1 不同网格密度时四种算法内壁平均当量导热系数的计算结果及计算时间( $t$ )

Tab.1 The result of the average Nusselt number and the computation time ( $t$ ) under different grid density

网格	$Nu (Ra = 10\ 000)$				$t/s$			
	SIMPLE	SIMPLER	SIMPLEC	SIMPLEX	SIMPLE	SIMPLER	SIMPLEC	SIMPLEX
$22 \times 22$	1.995	1.995	1.995	1.995	1.061	1.462	1.252	1.442
$42 \times 42$	1.984	1.984	1.984	1.987	19.83	17.51	14.31	17.45
$82 \times 82$	1.987	1.987	1.987	1.987	181.4	209.9	165.8	207.7
$102 \times 102$	1.990	1.990	1.990	1.990	437.1	562.6	443.8	553.4
文献[10]值	2.010							

2.2 健壮性的比较结果

在进行健壮性的比较时,分别在三套网格下计算了圆管突扩通道内的流动和竖直正方形空腔内的自然对流二个典型的问题。收敛判据同上,在相同的网格密度下,四种算法的收敛精度取为一致。其中:横坐标为时步倍率  $E (E = \alpha / (1 - \alpha))$ ,纵坐标为达到收敛要求所需的计算时间( $t$ )。这里以能获得收敛解的时步倍率(time step multiple)的变化范围的大小作为健壮性好坏的标志。二个

问题的考察结果均表明,无论是在疏网格还是在密网格下,SIMPLE 的健壮性总是最差的,而 SIMPLER 在网格较稀时表现出的健壮性和 SIMPLEC、SIMPLEX 差不多。但是随着网格的逐渐加密,SIMPLER 的健壮性就表现得较差,没有 SIMPLEC 和 SIMPLEX 的健壮性好。在密网格下,SIMPLEC 和 SIMPLEX 的健壮性差不多。其余两个问题的健壮性的考核结果也可以得到相同的结论。

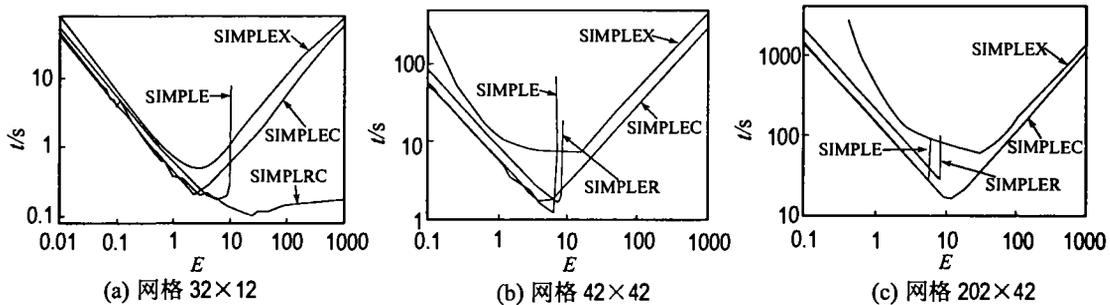


图 2 健壮性比较结果一(圆管突扩通道内的流动)

Fig.2 Robustness comparison for flow in a two-dimensional axisymmetric

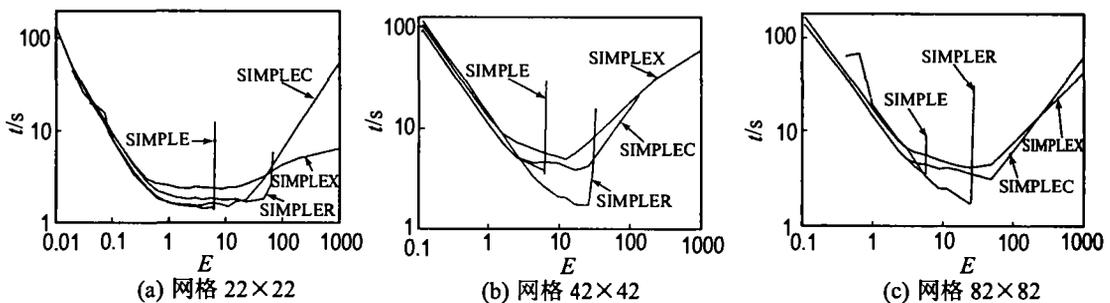


图 3 健壮性比较结果二(竖直正方形空腔内的自然对流)

Fig.3 Robustness comparison for natural convection in a square cavity

3 结 论

本文实施了 SIMPLEX 算法,并用“二维环腔

顶盖驱动流”、“环形空间的自然对流”、“圆管突扩通道内的流动”和“竖直正方形空腔内的自然对流”四个典型算例对 SIMPLE、SIMPLER、

SIMPLEC 以及 SIMPLEX 在不同的网格疏密程度下进行算法的收敛性与健壮性的考察,得到如下结论:

(1) 在以动量方程余量范数相对值作为收敛判据时,四种算法得出的计算精度完全一样。收敛所需的计算时间一般总是 SIMPLER 最多, SIMPLEX, SIMPLE 和 SIMPLEC 所需的时间较少。

(2) 在相同的收敛精度、相同的网格密度下, SIMPLE 的健壮性最差, SIMPLER, SIMPLEC 和 SIMPLEX 的健壮性相接近。

(3) 综合考虑收敛性以及健壮性,在网格较密时 SIMPLEC 是值得采用的算法。

### 参考文献:

- [1] PATANKAR S V, SPALDING D B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows [J]. *Int J of Heat and Mass Transfer*, 1972, 15: 1787-1806.
- [2] PATANKAR S V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* [M]. Washington: Hemisphere Washington DC., 1980.
- [3] PATANKAR S V. A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations [J]. *Numerical*

*Heat Transfer*, 1981, 4: 409-425.

- [4] VAN DOORMAAL J P, RATHY G D. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows [J]. *Numerical Heat Transfer*, 1984, 7:147-163.
- [5] VAN DOORMAAL J P, RATHY G D. An Evaluation of the segregated approach for predicting incompressible fluid flows [A]. *ASME Heat Transfer Conf 85-HT-9* [C]. Denver, 1985.
- [6] MOULALLED F, DARWISH M. A unified formulation of the staggered class of algorithms for fluid flow at all speeds [J]. *Numerical Heat transfer B*, 2000, 37:103-139.
- [7] 陶文铨. 数值传热学[M]. 第2版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001. 220-221, 238-243.
- [8] 陶文铨. 计算传热学的近代进展[M]. 北京: 科学出版社, 2000. 159-163.
- [9] FUCHS L, TILLMARK N. Numerical and experimental study of driven flow in polar cavity [J]. *Int J Numerical Methods Fluids*, 1985, 5: 311-329.
- [10] KUEHN T H, GOLDSTEIN R J. An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders[J]. *J Fluid Mech*, 1976, 74:605-719.

## Convergence characteristics of the SIMPLE series of algorithms in fine grid

ZENG Min, TAO Wen-quan

( College of Thermal Engineering and Power. Xi'an Jiaotong Univ. , Xi'an 710049, China )

**Abstract:** The SIMPLEX algorithm was implemented. In this algorithm the coefficient of pressure difference influence  $d_u$ ,  $d_v$  are determined by solving equations. So determined  $d_u$ ,  $d_v$  serve as the coefficient of the pressure correction equation. The relative performance of SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC and SIMPLEX was compared for four typical flow and heat transfer problems. Generally speaking, the SIMPLEC algorithm is superior to all others in computational accuracy computation time and robustness. This is different with the conclusions in existing literatures.

**Key words:** SIMPLE series of algorithms; flow and heat transfer problem; numerical simulation; robustness