

模糊控制方法在黏性流场迭代计算中的应用*

刘训良^① 陶文铨^① 郑平^② 何雅玲^① 王秋旺^①

(^①西安交通大学能动学院, 西安 710049; ^②香港科技大学机械工程系, 香港)

摘要 在用 SIMPLER 算法求解黏性流场的过程中, 采用了模糊控制方法改变亚松弛因子的大小, 显著地加快了收敛速度. 进行数值计算时, 将相邻两次迭代中动量方程或能量方程残差范数的比值作为控制输入量, 经过模糊化、模糊推理和解模糊, 输出亚松弛因子的变化率, 并以新的亚松弛因子进行下一次迭代. 对 4 个二维有基准解的层流的流动和传热问题使用该方法求解, 都在几乎是最少迭代次数下获得了收敛的结果, 证明了该方法的有效性.

关键词 模糊控制 松弛因子 收敛 SIMPLER 算法

在进行黏性流场的数值计算时, SIMPLER 算法及其改进方案得到广泛应用. 描写流动和换热问题的控制方程大多是非线性的, 为有利于非线性问题迭代计算的收敛, 一般都进行亚松弛处理, 以限制相邻两层次之间待求量的变化. 为加快收敛速度, 选择合适的亚松弛因子是一个关键因素. 由于非线性问题迭代求解过程的复杂性, 如何选择合适的亚松弛因子, 具有很大的不确定性, 很难为其建立数学模型. 因而, 可以考虑使用模糊控制方法.

应用模糊理论改变亚松弛因子的大小以加速收敛的方法, 国外已有文献报道. Ryoo 等人^[1]曾介绍了他们在这方面所取得的一些进展. 他们认为, 动量方程和能量方程的残差减小是迭代趋于收敛的象征, 因此选取相邻两次迭代残差范数的比值作为控制输入量, 松弛因子的变化率为输出量. 若残差范数比值较大, 迭代可能趋于发散, 应减小松弛因子. 比值较小, 应增大松弛因子, 以加速收敛. 但关于模糊推理的方法及如何实施在该文中未见说明. 本文采用文献[2,3]中介绍的方法进行模糊推理, 并对输入量的隶属函数作了改进, 完成了模糊控制算法的设计. 为了验证算法的合理性和有效性, 对 4 个典型的流动传热问题用 SIMPLER 算法进行了数值计算, 给出了亚松弛因子取固定值和采用模糊控制两种方法收敛时所需迭代次数的对比情况.

1 模糊控制原理简介

模糊理论是近 20 多年来发展起来的一门新兴的数学理论, 在各个领域得到了广泛的应用, 模糊控制即是它在控制过程中的应用. 对于一些复杂的控制过程, 被控对象难以用现有的理论来描述, 以致不能为其建立数学模型, 应用传统的控制理论难以取得满意的控制效果, 而模糊控制常能达到预期的目的.

模糊控制的原理可以用方框图来说明, 如图 1 所示. 从图中可以看出, 模糊控制过程主要

2001-11-19 收稿, 2002-03-13 收修改稿

* 国家重点基础研究发展规划项目(批准号: G2000026303)和国家自然科学基金资助项目(批准号: 59076034)

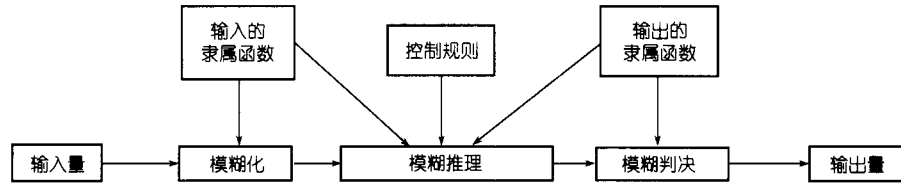


图1 模糊控制原理方框图

由3部分组成:

- (i) 控制输入量的模糊化. 将确定的输入量转化为模糊子集.
- (ii) 模糊推理. 根据输入、输出量的隶属函数和模糊控制规则, 按照模糊数学的运算法则, 计算由它们决定的模糊关系, 从而确定与输入相应的输出的模糊子集.
- (iii) 模糊判决. 即解模糊, 完成输出量的模糊子集到精确量的转化.

2 模糊控制方法的实施

2.1 控制输入量和输出量

对于二维的对流传热问题, 假定流体为不可压 Newton 流体, 忽略黏性耗散, 除密度外物性取为常数, 满足 Boussinesq 假设. 其控制方程详见文献[4]. 采用有限容积法, 离散后的控制方程可统一写成以下的形式:

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b, \quad (1)$$

式中, ϕ 代表待求物理量, ϕ_p 和 ϕ_{nb} 分别是主节点和相邻节点的 ϕ 值, a_p 和 a_{nb} 分别是相应的系数, b 是源项. 将亚松弛的处理直接纳入迭代过程, 即有

$$\phi_p^n = \phi_p^{n-1} + \alpha \left(\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb}^{n-1} + b}{a_p} - \phi_p^{n-1} \right), \quad (2)$$

式中, ϕ_p^n 和 ϕ_p^{n-1} 分别是主节点第 n 次和第 $n-1$ 次迭代的 ϕ 值, α 为亚松弛因子.

进一步整理为

$$\frac{a_p}{\alpha} \phi_p^n = \sum a_{nb} \phi_{nb}^{n-1} + b + (1-\alpha) \frac{a_p}{\alpha} \phi_p^{n-1}, \quad (3)$$

第 n 次迭代后方程的残差可表达为

$$d = \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb}^n + b - a_p \phi_p^n}{a_p}. \quad (4)$$

对整个求解区域求 d 的范数:

$$\|d\| = \sqrt{\sum d^2}. \quad (5)$$

模糊控制的输入量为

$$e = \frac{\|d\|_n}{\|d\|_{n-1}}. \quad (6)$$

模糊控制的输出量取亚松弛因子的变化率 $\Delta\alpha$, 修正后的亚松弛因子 α_{n+1} 可表示为

$$\alpha_{n+1} = (1 + \Delta\alpha)\alpha_n. \quad (7)$$

2.2 隶属函数和控制规则

模糊集合是通过它的隶属函数来表征的, 模糊集合的运算也是通过其隶属函数的相应运算来实现的. 在普通集合论中, 描述集合的特征函数只允许取 $\{0,1\}$ 两个值, 即元素属于该集合则取 1, 否则取 0, 它与二值逻辑相对应. 在模糊集合论中, 模糊集合的隶属函数描述元素对该集合的隶属程度, 可取 $[0, 1]$ 闭区间上的无穷多个值, 它是特征函数的拓广. 确定隶属函数的方法多种多样, 与具体问题有关, 没有一个固定的模式, 需在数值实践过程中予以确定. 判断隶属函数的好坏应看它是否能达到满意的控制效果.

控制输入量 e 和输出量 $\Delta\alpha$ 都是模糊语言变量, e 有 3 个值: PB, PM 和 PS, $\Delta\alpha$ 也有 3 个值: NB, NS 和 PS. PB, PM 和 PS 分别表示模糊子集“正大”、“正中”和“正小”, NB 和 NS 相应地代表“负大”和“负小”. 各模糊子集的隶属函数选择三角形或梯形的形式, 可以统一表示成图 2 的形式, 其中纵坐标为隶属函数值, 而横坐标则为具有某些共同特性的模糊子集的元素. 图中, a 和 b 分别为梯形上边两端点的横向坐标值, c 和 d 分别为两斜边对应区间的长度, 相应的值如表 1 所示. 表中的这些值是经过多次数值实验确定出来的. 根据表 1 可确定元素对模糊集合的隶属度, 例如, 对于输入量 e , 元素 2.0 对 PS 的隶属程度为 0, 对 PM 的隶属度为 1.0, 对 PB 的隶属度为 0.5.

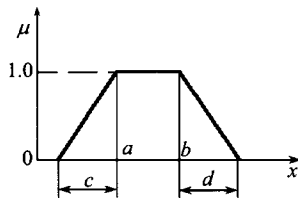


图 2 隶属函数 $\mu(x)$ 示意图

表 1 输入量和输出量的隶属函数

e	PS	PM	PB	$\Delta\alpha$	NB	NS	PS
a	0	2.0	2.5	a	-0.4	-0.25	0.2
b	0	2.0	∞	b	-0.4	-0.25	0.2
c	0	1.0	1.0	c	0	0	0.4
d	1.0	0.5	0	d	0.5	0.5	0

控制规则如表 2 所示, 它由 3 条规则组成, 亦可用条件语句表达, 如第 1 条可叙述为: 若 e 为“正大”, $\Delta\alpha$ 为“负大”.

表 2 模糊控制规则

e	PB	PM	PS
$\Delta\alpha$	NB	NS	PS

2.3 模糊控制算法的实施

本文采用单输入单输出的模糊控制模式, 模糊推理采用文献[3]介绍的方法. 模糊控制算法的实施过程如下:

将表 2 中的 3 条模糊规则改写成如下形式:

R_1 : 如果 $e = A_1$, 那么 $\Delta\alpha = B_1$,

R_2 : 如果 $e = A_2$, 那么 $\Delta\alpha = B_2$,

R_3 : 如果 $e = A_3$, 那么 $\Delta\alpha = B_3$,

其中, 模糊子集 $A_1 \sim A_3$ 分别表示 PB, PM 和 PS. $B_1 \sim B_3$ 分别表示 NB, NS 和 PS.

模糊规则集全体构成的模糊关系 R 为

$$R = \bigcup_{i=1}^3 R_i, \quad (8)$$

$$R_i = A_i \times B_i, \quad (9)$$

其中 R_i 是第 i 条规则所蕴涵的模糊关系, 符号 “ \cup ” 表示求并运算, $A_i \times B_i$ 是两个模糊集合的直积.

若已求得某一确定的残差范数的比值, 把它看作一个特殊的模糊子集-模糊单点. 模糊单点是这样一个模糊集合, 在其论域上满足隶属函数值大于0的元素只有一个点, 表示在图上是位于该点的一条长度为1的竖直线段. 此即输入量的模糊化, 得到 e 的值为模糊单点 A .

控制输出由下式求得:

$$B = A \circ R.$$

这是模糊推理的合成运算法则, “ \circ ” 为合成算子.

由模糊推理逻辑求得的模糊控制的输出 B 是一个模糊集合, 它的隶属函数记作 $\mu_B(x)$, 这个模糊输出要通过解模糊的过程转化为精确量.

输出的解模糊采用重心法, 可以用下式表示:

$$x^* = \frac{\int x \mu_B(x) dx}{\int \mu_B(x) dx}, \quad (10)$$

式中, x 为隶属函数图的横坐标, x^* 为输出量的精确量, 即亚松弛因子的变化率 $\Delta\alpha$.

将上述算法编制成程序, 作为一个独立的模块, 在运行 SIMPLER 算法主程序时, 每迭代一次, 分别计算动量方程和能量方程的残差范数的比值, 然后调用该模块, 修正速度和温度的亚松弛因子, 以新的松弛因子重新计算各节点的系数后, 进行下一次迭代.

3 算例

对4个二维、层流的流动和换热问题进行数值计算, 采用有限容积法和 SIMPLER 算法, 在亚松弛因子取固定值和使用模糊控制两种情况下, 分别求解. 收敛的判据为, 连续性方程节点余量的代数及节点余量的最大绝对值对参考流量的相对值小于一定值, 即

$$\frac{R_{\text{sum}}}{q_m} \leq 1 \times 10^{-7}, \quad \frac{R_{\text{max}}}{q_m} \leq 1 \times 10^{-7}. \quad (11)$$

对于开口系统, 参考质量 q_m 可取为入口的质量流量. 对于闭口系统, 如顶盖驱动流(见图3(b)), 可取流场中任一截面作如下数值积分:

$$q_m = \int_a^b \rho |u| dy. \quad (12)$$

值得指出的是, 在(12)式中用的是速度的绝对值, 因而无论对什么情况, 都不会使 q_m 为零.

3.1 算例

算例1 方腔内自然对流, 如图3(a)所示, 上下壁绝热, 左右壁温恒定, 右壁温度较高, 在不同的 Ra 数下计算流场和温度场, $Ra = \rho^2 g \beta \Delta T L^3 Pr / \eta^2$. 网格数为 20×20 .

算例2 顶盖驱动流, 如图3(b)所示, 顶盖以恒定的速度移动, 在不同的 Re 数下求解流场. 网格数为 20×20 .

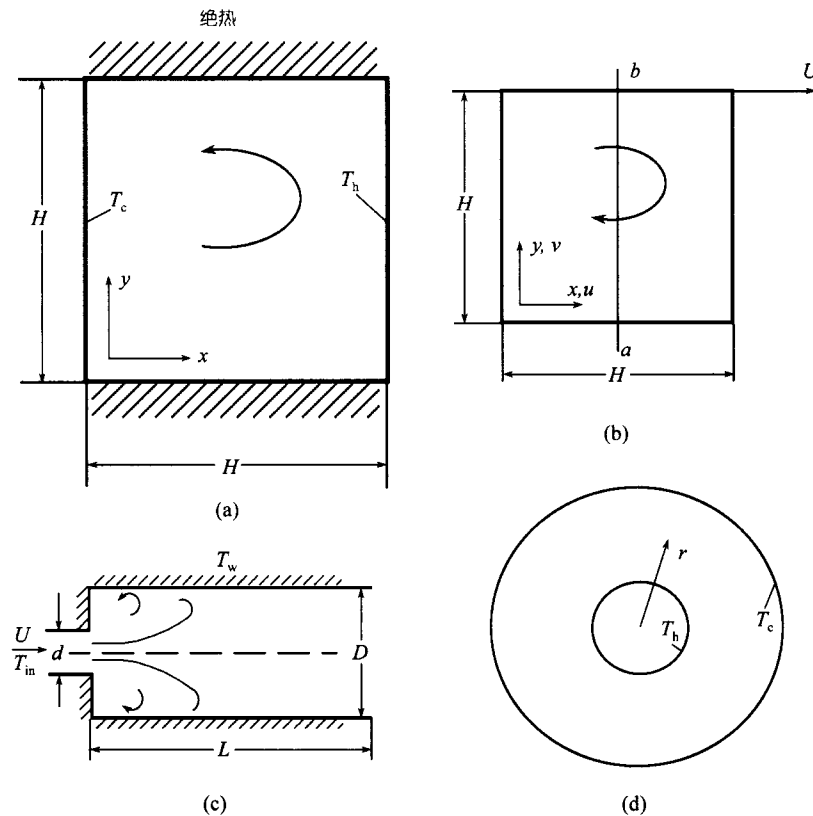


图 3 方腔自然对流(a)、顶盖驱动流(b)、圆管突扩通道流动(c)和环形空间自然对流(d)示意图

算例 3 圆管突扩通道流动, 如图 3(c)所示, 圆管壁和台阶温度恒定, 且高于进口的温度, 在不同的 Re 数下求解流场和温度场. 网格数为 40×10 .

算例 4 环形空间内自然对流, 如图 3(d)所示, 内外壁温恒定, 且内壁温度高, 在不同的 Ra 数下计算流场和温度场. 网格数为 20×30 .

3.2 获得收敛解所需迭代次数的比较

对所计算的各工况, 采用模糊控制时都可以得到收敛的解, 但采用固定松弛因子的场合, 某些情形得不到收敛的解. 亚松弛因子取固定值以及采用模糊控制时获得收敛解所需的迭代次数列于表 3 中. 为了更直观一些, 将两种方法迭代次数的对比情况分别示于图 4, 4 个算例各给出 1 种工况.

由图可见, 对所计算的 4 个例子, 采用模糊控制后, 几乎都可以使迭代次数减少到接近最佳松弛因子时的值, 效果十分明显.

图 5 画出了例 1 (Ra 为 10^6) 的迭代收敛历史. 由图可见, 松弛因子在迭代开始时很快衰减, 但随着迭代的进行, 又呈螺旋式上升趋势, 向某一中间值逼近. 这种变化的样子是有代表性的.

表 3 各算例中收敛时所需迭代次数的对比

方腔自然对流(直角坐标系)								
Ra	松弛因子 α							模糊控制
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.95	0.98	
10^3	2366	1433	831	440	147	80	308	162
10^4	2707	1330	721	368	118	63	238	169
10^5	2948	1163	597	295	93	振荡	振荡	221
10^6	2623	944	472	230	振荡	振荡	发散	238
10^7	3207	1133	565	振荡	发散	发散	发散	506
顶盖驱动流(直角坐标系)								
Re	松弛因子 α							模糊控制
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.95	0.98	
10^2	799	389	215	115	46	32	73	77
10^3	997	403	209	106	56	55	发散	77
圆管突扩通道流动(圆柱坐标系)								
Re	松弛因子 α							模糊控制
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.94	0.98	
10^2	801	244	118	60	27	58	振荡	81
10^3	1450	572	322	174	81	68	838	97
环形空间自然对流(极坐标系)								
Ra	松弛因子 α							模糊控制
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	0.95	0.98	
10^4	3756	2018	1130	590	195	发散	发散	646
10^5	5469	2226	1149	566	186	发散	发散	647

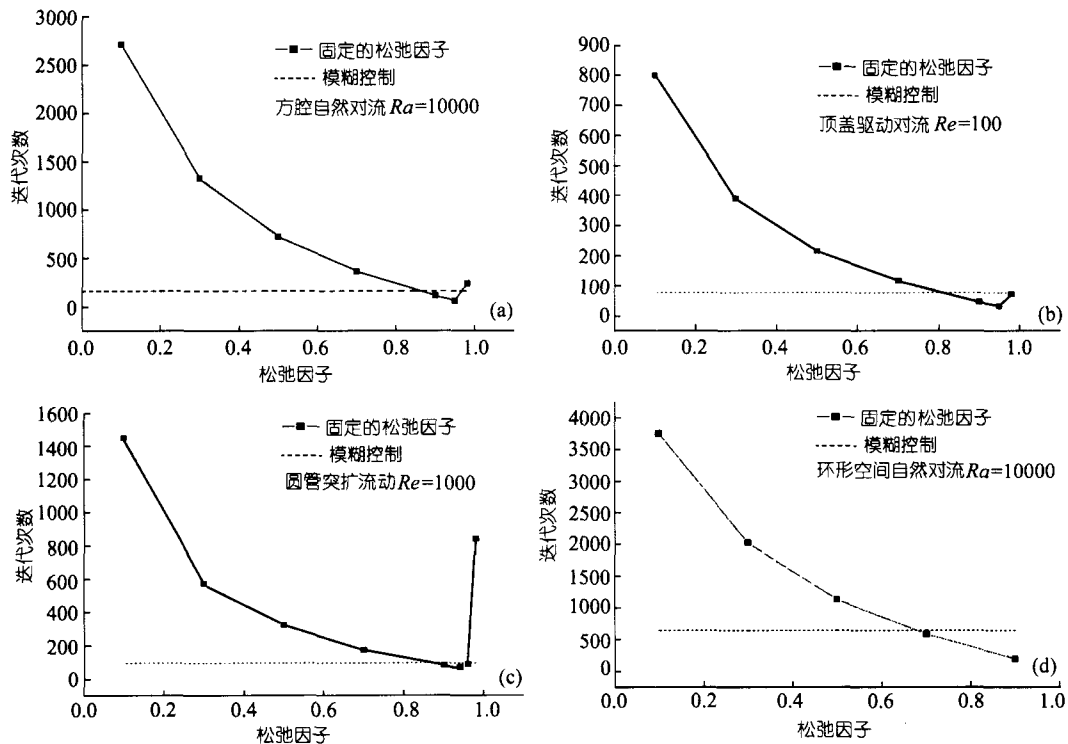


图 4 算例 1~4 ((a)~(d))迭代次数随亚松弛因子的变化曲线

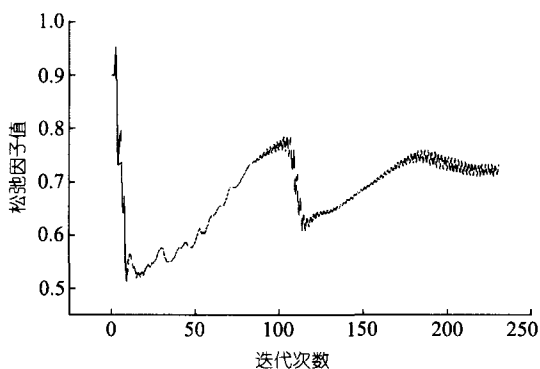


图 5 算例 1 中 Ra 为 10^6 时温度松弛因子值的变化曲线

4 结论

对于 3 种正交坐标系下二维、层流的流动和传热问题, 本文所采用的模糊控制方法可以加快 SIMPLER 算法迭代计算收敛的速度, 而且提高了算法的健壮性, 如方腔自然对流中 $Ra = 1 \times 10^7$ 时的情况.

最后应该说明的是, 本文只研究了二维层流问题, 对于三维和湍流问题采用 SIMPLER 算法时的模糊控制问题, 作者正在作进一步研究.

参 考 文 献

- 1 Ryoo J, Kaminski D, Dragojlovic Z. A residual-based fuzzy logic algorithm for control of convergence in a computational fluid dynamic simulation. *ASME Journal of Heat Transfer*, 1999, 121: 1076 ~ 1078
- 2 张乃尧, 阎平凡. 神经网络与模糊控制. 北京: 清华大学出版社, 1998. 189 ~ 193
- 3 李友善, 李 军. 模糊控制理论及其在过程中的应用. 北京: 国防工业出版社, 1993. 56 ~ 74
- 4 陶文铨. 数值传热学(第二版). 西安: 西安交通大学出版社, 2000. 1 ~ 5, 211 ~ 220