

文章编号: 0253 - 987X(2002)01-0020-05

SIMPLE 算法的一个新的改进方案

郭航¹, 马重芳¹, 陶文铨², 张东升², 焦安军², 吴江涛²

(1. 北京工业大学环境与能源工程学院, 100022, 北京; 2. 西安交通大学能源与动力工程学院)

摘要: 提出了 SIMPLE 算法的一个新的改进方案——MSIMPLE. 该方案采用 SIMPLER 中的方法对速度修正方程进行处理, 同时对压力场的确定采用 SIMPLER 中的方法来完成. 通过对 2 个典型的流动传热问题(圆管突扩通道内的流动、正方形空腔内的自然对流)的计算, 将该改进方案与 SIMPLE、SIMPLER、SIMPLER 算法进行了初步对比. 结果表明, 改进方案有着更好的收敛特性, 并且能节省数值计算的计算时间.

关键词: SIMPLE 算法; 收敛特性; 流动; 传热

中图分类号: TK124 **文献标识码:** A

New Improvement of the SIMPLE Algorithm

Guo Hang¹, Ma Chongfang¹, Tao Wenquan², Zhang Dongsheng², Jiao Anjun², Wu Jiangtao²

(1. College of Environmental and Energy Engineering, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, China;

2. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University)

Abstract: A new improvement of the SIMPLE algorithm has been proposed. In this improved algorithm (MSIMPLE), consistency of velocity correction equation was considered by using the method adopted in the SIMPLER algorithm, while the pressure field was determined by the way adopted in the SIMPLER algorithm. Comparisons between MSIMPLE and SIMPLE, SIMPLER, SIMPLER algorithms were conducted by calculating two typical flow and heat transfer problems (flow in a two-dimensional axisymmetric sudden expansion, natural convection in a square cavity). The results of comparison indicated that the new algorithm has better convergence characteristics and can speed up the solution procedure.

Keywords: SIMPLE algorithm; convergence characteristics; flow; heat transfer

SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) 算法自 1972 年由 Patankar 和 Spalding 提出以来^[1], 在计算流体动力学和数值传热学领域不仅得到了广泛的应用, 同时也得到了不断的改进与发展. 目前, SIMPLE 系列算法不仅在不可压缩流体 Navier-Stokes 方程的数值求解中应用得非常广泛, 并且也被成功地应用于可压缩流体流

场的数值计算中.

改进 SIMPLE 算法的收敛特性, 提高运算速度是从事数值计算的研究人员所追求的目标之一, 也是很多 SIMPLE 算法改进方案提出者的初衷. 本文在对前人工作进行总结分析的基础上, 对 SIMPLE 算法的改进进行了探索, 提出了一个新的改进方案 (MSIMPLE, 即 Mended SIMPLE), 并对该方案进行

收稿日期: 2001-05-18. 作者简介: 郭航(1970~), 男, 在职博士生, 讲师. 基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(G2000026304); 国家自然科学基金资助项目(50028605).

了初步的考察.

1 SIMPLE 系列算法概述

在 Navier-Stokes 方程的求解方法中, SIMPLE 方法属于以压力为基本变量的原始变量法. 它是用速度的改进值写出的动量方程减去用速度的现时值写出的动量方程, 在略去源项和对流-扩散项之后, 再代入质量守恒方程的离散形式, 来获得压力修正方程的. 当解出压力修正值, 对压力修正值采用亚松弛后, 用其改进压力及速度. 在 SIMPLE 的众多改进算法中, 较著名的有 SIMPLER 和 SIMPLEC. SIMPLEC 算法考虑了求解速度修正方程的“协调性”问题, 而且压力修正值不作亚松弛^[2]. SIMPLER 则是 Patankar 提出的^[3,4], 它对压力的初值及更新采用独立求解压力方程的方法来得到, 压力不作亚松弛. 由压力修正方程求出的压力修正值仅用于改进速度.

2 一个新的改进方案

在对前人的工作进行总结分析的基础上, 本文提出了 SIMPLE 算法的一个新的改进方案——MSIMPLE. 此方案既考虑了求解速度修正方程的“协调性”问题, 同时又对压力的初值及更新采用单独求解压力 Poisson 方程的方法来完成.

2.1 具有协调性的压力修正方程的导出

该改进方案的主体仍然采用 SIMPLE 的基本思想, 即用速度的改进值写出的动量方程减去用速度的现时值写出的动量方程, 得到速度修正方程, 然后对其进行一定的简化.

以直角坐标系中二维稳态流动为例, 离散后的连续性方程与动量方程分别为

$$(u_y)_e - (u_y)_w + (v_x)_n - (v_x)_s = 0 \tag{1}$$

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e &= a_{nb}^u u_{nb} + b^u + (p_P - p_E) A_e \\ a_n v_n &= a_{nb}^v v_{nb} + b^v + (p_P - p_N) A_n \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

将式(2)改写为

$$\left. \begin{aligned} u_e &= \tilde{u}_e + d_e (p_P + p_E) \\ v_n &= \tilde{v}_n + d_n (p_P + p_N) \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_e &= \frac{a_{nb}^u u_{nb} + b^u}{a_e}, d_e = \frac{A_e}{a_e} \\ \tilde{v}_n &= \frac{a_{nb}^v v_{nb} + b^v}{a_n}, d_n = \frac{A_n}{a_n} \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

将式(3)代入到式(1)中, 可得压力方程为

$$a_P p_P = a_{nb} p_{nb} + b^p \tag{5}$$

利用式(5)求解压力 p^* , 再利用 p^* 求解动量方程, 得到与之相应的速度 u^* 、 v^* . 假定压力、速度的修正量分别为 p 、 u 、 v , 则修正后的速度与压力分别为 $u = u^* + u$, $v = v^* + v$ 及 $p = p^* + p$. 假定 u 、 v 、 p 满足动量方程(2)与连续方程(1), 则

$$\left. \begin{aligned} a_e (u_e^* + u_e) &= a_{nb}^u (u_{nb}^* + u_{nb}) + b^u + [(p_P^* + p_P) - (p_E^* + p_E)] A_e \\ a_n (v_n^* + v_n) &= a_{nb}^v (v_{nb}^* + v_{nb}) + b^v + [(p_P^* + p_P) - (p_N^* + p_N)] A_n \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

因为 p^* 、 u^* 、 v^* 满足下式

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e^* &= a_{nb}^u u_{nb}^* + b^u + (p_P^* - p_E^*) A_e \\ a_n v_n^* &= a_{nb}^v v_{nb}^* + b^v + (p_P^* - p_N^*) A_n \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

式(6)与式(7)相减, 得速度修正方程如下

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e &= a_{nb}^u u_{nb} + (p_P - p_E) A_e \\ a_n v_n &= a_{nb}^v v_{nb} + (p_P - p_N) A_n \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

在对上述速度修正方程的处理上, 本文的 MSIMPLE 算法借鉴了 SIMPLEC 的“协调性”思想, 即将式(8)中两式等号的两端分别减去

$a_{nb}^u u_{nb}$ 、 $a_{nb}^v v_{nb}$ 后, 得

$$\left. \begin{aligned} (a_e - a_{nb}^u) u_e &= a_{nb}^u (u_{nb} - u_e) + (p_P - p_E) A_e \\ (a_n - a_{nb}^v) v_n &= a_{nb}^v (v_{nb} - v_n) + (p_P - p_N) A_n \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

由于 u_e 与 u_{nb} 以及 v_n 与 v_{nb} 具有相同的数量级, 可以预期, 略去 $a_{nb}^u (u_{nb} - u_e)$ 和 $a_{nb}^v (v_{nb} - v_n)$ 所产生的影响要远小于在式(8)中略去

$a_{nb}^u u_{nb}$ 、 $a_{nb}^v v_{nb}$ 所带来的影响, 于是有

$$\left. \begin{aligned} u_e &= d_{em} (p_P - p_E) \\ v_n &= d_{nm} (p_P - p_N) \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} d_{em} &= A_e / (a_e - a_{nb}^u) \\ d_{nm} &= A_n / (a_n - a_{nb}^v) \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

所以

$$\left. \begin{aligned} u_e &= u_e^* + d_{em}(p_p - p_E) \\ v_n &= v_n^* + d_{nm}(p_p - p_N) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将式(12)代入式(1)中,可得压力修正方程为

$$a_p p_p = a_{nb} p_{nb} + b_p \quad (13)$$

其中

$$a_E = e_{dem} y; \quad a_N = n d_{nm} x$$

$$a_p = a_{nb}; \quad b_p = (u^* y)_e^w + (v^* x)_n^s$$

对于压力场的修正,在本文的 MSIMPLE 中借鉴了 SIMPLER 的思想: p 只用来修正速度,不用它来修正压力.在得到修正后的速度值后,通过求解压力 Poisson 方程,可直接得到新的压力值,压力场不必亚松弛.

2.2 求解步骤

假定一个初始速度场 V ; 求出离散动量方程(2)中的各项系数; 利用式(4)求解出假拟速度场 \bar{V} ; 利用式(5)求解压力方程,得 p^* ; 利用 p^* 求解动量方程(2),得 V^* ; 根据 V^* 求解压力修正方程(13),得压力修正值 p ; 利用 p ,由式(12)得到新一轮速度场,但不修正压力; 求解其他与流场耦合的变量,返回步骤 ,直至流场收敛,然后求解其他与流场不耦合的变量.

由此可见,本文的 SIMPLE 方法对速度修正方程采取“协调”的处理方法,并对压力的初值和更新采用单独求解压力 Poisson 方程来解决.这种方案能否改进算法的收敛特性,缩短计算时间,需要用典型的算例进行考察.

3 两个典型的流动传热问题的计算

3.1 圆管突扩通道内的流动

如图 1 所示, D_{in} 和 D_{out} 分别是圆管进口及出口直径, $D_{in}/D_{out} = 0.5$; L_{in} 为进口段长度; L_a 为回流

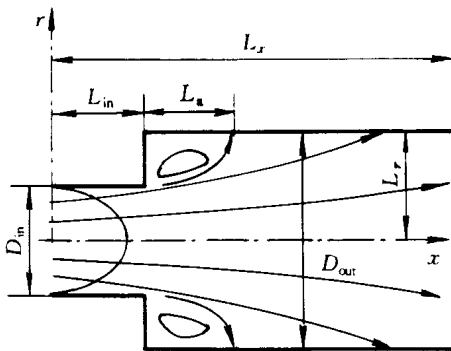


图 1 圆管突扩通道内的流动

区长度; L_x 和 L_r 分别为计算区域的 x 及 r 方向的长度, $L_r = 0.5 D_{out}$,计算时取 $L_x - L_{in} = 4 L_a$.根据圆管的对称性,取一半作为计算区域.设进口流速呈抛物线分布,即

$$u = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R_{in}^2} \right)$$

其中: $R_{in} = D_{in}/2$

对参数进行如下的无量纲化

$$X = x/R_{in}, \quad R = r/R_{in}$$

$$U = u/u_m, \quad V = v/u_m$$

$$Re = \frac{u_m(2 R_{in})}{(\mu/\rho)}$$

式中: u_m 为进口流速的平均值.无量纲化后的控制方程组为

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{V}{R} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial X}(UU) + \frac{\partial}{\partial R}(RVU) &= -\frac{\partial p}{\partial X} + \left(\frac{2}{Re} U \right) \\ \frac{\partial}{\partial X}(UV) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RVV) &= -\frac{\partial p}{\partial R} + \left(\frac{2}{Re} V \right) - \frac{2}{Re} \frac{V}{R^2} \end{aligned}$$

边界条件为:当 $R = 0$ 时, $\frac{\partial U}{\partial R} = 0, V = 0$;当 $R = 2$ 时, $U = 0, V = 0$;当 $X = 0, 0 < R < R_{in}$ 时, $U = 2 \cdot (1 - R^2)$;当 $X = L_x/R_{in}$ 时, $\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \frac{\partial V}{\partial X} = 0$.采用区域扩充法,即当 $0 < X < L_{in}/R_{in}, R_{in} < R < 2$ 时,粘度取无限大.

本文用改进方案 MSIMPLE 分别在 52×12 、 102×17 、 202×22 、 402×42 四套不同疏密的网格上对该问题进行了计算.由回流区长度与入口直径之比这一标志性参数的计算结果(见表 1)可知:采用 202×22 与 402×42 时,计算结果的相对误差小于 0.5% .因此,可以认为获得了与网格疏密无关的解.综合考虑计算机的内存占用、计算时间等因素,以 202×22 网格时的收敛解作为数值计算的结果.另外,从表 1 还可以看到,计算结果与文献[5]的实验

表 1 不同网格密度时 L_a/D_{in} 的计算结果

网 格	L_a/D_{in}	
	$Re = 150$	$Re = 200$
52 × 12	6.38	8.50
102 × 17	7.44	9.93
202 × 22	6.60	8.82
402 × 42	6.63	8.86
实验值 ^[5]	6.5	8.8

数据非常接近,这也验证了 MSIMPLE 计算程序的正确性.

3.2 竖直正方形空腔内的自然对流

如图 2 所示, T_H 为热壁面温度, T_C 为冷壁面温度, g 为重力加速度. 对参数进行如下的无量纲化

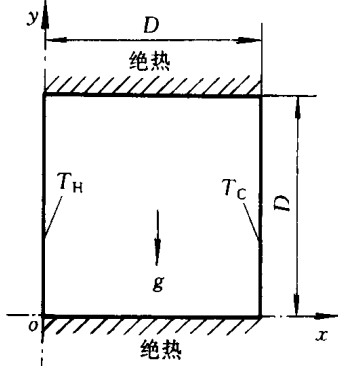


图 2 竖直正方形空腔内的自然对流

$$X = x/D; Y = y/D; U = u/u_0; V = v/u_0$$

$$P = \frac{p}{c u_0^2}; \quad = \frac{T_H - T_C}{T_H - T_C}$$

式中: c 为与 T_C 对应的密度,在处理自然对流问题时采用 Boussinesq 假设,将重力项中的密度表示为 $\rho = \rho_c [1 - \beta (T - T_C)]$, β 为热膨胀系数. 取

$$u_0 = \frac{1}{D} \left(\frac{a \mu}{c} Ra \right)^{1/2} = (g D (T_H - T_C))^{1/2}$$

式中: μ 为动力粘性系数; a 为导温系数; Rayleigh

$$数 Ra = \frac{c g D^3 (T_H - T_C)}{a \mu}$$

无量纲化后的控制方程组为

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial X} (UU) + \frac{\partial}{\partial Y} (VU) = - \frac{\partial P}{\partial X} +$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} (UV) + \frac{\partial}{\partial Y} (VV) = - \frac{\partial P}{\partial Y} +$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial X} (U) + \frac{\partial}{\partial Y} (V) =$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(- \frac{\partial}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(- \frac{\partial}{\partial Y} \right)$$

式中: $\theta = (Pr/Ra)^{1/2}$, Pr 为 Prandtl 数.

边界条件为:当 $X=0$ 时, $U=0, V=0, \theta=1$;

当 $X=1$ 时, $U=0, V=0, \theta=0$; 当 $Y=0$ 时, $U=$

$0, V=0, \frac{\partial \theta}{\partial Y}=0$; 当 $Y=1$ 时, $U=0, V=0, \frac{\partial \theta}{\partial Y}=0$.

本文用改进方案 MSIMPLE 分别在 22×22 、 42×42 、 82×82 三套不同疏密的网格上对该问题进行了计算,表 2 中列出了空腔中点处流函数 ψ_{mid} 的计算值以及文献[2]认为的该问题的最佳解.

表 2 不同网格密度时 ψ_{mid} 的计算结果 ($Ra=1000$)

网 格	22 × 22	42 × 42	82 × 82	文献[2]
ψ_{mid}	- 1.195	- 1.183	- 1.180	- 1.174

由表中可见,采用 82×82 网格时的计算精度已经足够好.另外,通过考察 82×82 与 162×162 两套网格的计算结果可知,两者的相对误差小于 0.5%,因此可以认为获得了与网格疏密程度无关的解,再综合考虑计算时间、计算机内存占用等因素,最后以 82×82 网格时的收敛解作为数值计算的结果.

4 几种不同算法的比较

本文分别用 SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC 以及本文提出的 MSIMPLE 这几种不同的算法对前面的 2 个典型算例进行了数值计算,下面是其计算结果.

4.1 圆管突扩通道内的流动

对于该算例,速度 $U、V$ 的松弛因子均取 0.5. 本文采用的收敛判据为:连续性方程余量的范数小于 5×10^{-6} . 表 3 中的 $t/t_{MSIMPLE}$ 是采用各算法与采用 MSIMPLE 算法时所占用的 CPU 时间的比值. I 为迭代层次数.

表 3 圆管内突扩流动的计算结果

算 法	参 数	$Re=150$	$Re=200$
SIMPLE	$t/t_{MSIMPLE}$	1.126	5.556
	I	1629	3102
	L_a/D_{in}	6.60	8.82
SIMPLER	$t/t_{MSIMPLE}$	1.291	1.222
	I	338	313
	L_a/D_{in}	6.60	8.82
SIMPLEC	$t/t_{MSIMPLE}$	6.582	1.277
	I	3913	374
	L_a/D_{in}	6.60	8.82
MSIMPLE	$t/t_{MSIMPLE}$	1	1
	I	257	263
	L_a/D_{in}	6.60	8.82
实验值 ^[5]	L_a/D_{in}	6.5	8.8

从表3可以看到,在与其他3种算法收敛解的判据相同的情况下,本文提出的改进方案的迭代层次数最少,达到收敛所占用的计算机CPU时间也最少。

4.2 竖直正方形空腔内的自然对流

计算结果见表4。该算例速度 U 、 V 的松弛因子均取0.6,温度的松弛因子取0.9。采用的收敛判据为:连续性方程余量的范围数小于 1×10^{-8} 。

在表4中, t/t_{MSIMPLE} 是采用各算法与采用MSIMPLE算法时所占用的CPU时间的比值。 I 为迭代层次数; \bar{u}_{mid} 为空腔中点处的流函数; Nu_{max} 是热壁面上的最大 Nu 数(以 D 为特征尺度); Nu_{min} 是热壁面上的最小 Nu 数; U_{max} 、 V_{max} 分别是通过中心线的垂直面上,以及通过中心线的水平面上的最大无量纲速度; (y/D) 或 (x/D) 是取得上述各值时的位置。 \bar{Nu} 是平均 Nu 数。

应该指出的是,在对速度进行无量纲化时,文献[2]中采用的方法($U = uD/a$, $V = vD/a$)与本文采用的方法不同。为了能与文献[2]中的数据进行对比,本文已经将相关的计算结果进行了转化,表4中的 U_{max} 、 V_{max} 以及 \bar{u}_{mid} 均是转化后的计算结果。

从表4可以看到,在与其他3种算法的收敛精度相同的情况下,本文提出的改进方案所占用的CPU时间仍是最少,且达到收敛所用的迭代次数也

是最少:MSIMPLE的迭代层次数分别约是SIMPLE的80%、SIMPLER的82%、SIMPLEC的36%。

5 结 论

(1)本文提出了SIMPLE算法的一个新的改进方案——MSIMPLE。该方案在考虑了求解速度修正方程的“协调性”问题的同时,对压力的初值及更新采用单独求解压力Poisson方程的方法来完成。

(2)用“圆管内突扩通道内的流动”和“竖直正方形空腔内的自然对流”这2个典型算例对提出的改进方案进行了初步的考察,表明利用MSIMPLE可以得到精度很好的计算结果。

(3)本文分别采用SIMPLE、SIMPLER、SIMPLEC以及MSIMPLE方法,在同样的计算条件下对2个典型算例进行了对比计算。对比结果表明:在收敛条件相同的情况下,MSIMPLE的迭代层次数最少,达到收敛所占用的计算机CPU时间也最少。

(4)对于不同的算例及计算条件,MSIMPLE在缩短计算机CPU占用时间上所表现出的优势有大有小,对该方案进行更多的检验和考察有待于进一步的工作。

表4 竖直正方形空腔内自然对流换热的计算结果 ($Ra = 1\ 000$)

参 数	SIMPLE	SIMPLER	SIMPLEC	MSIMPLE	文献[2]
\bar{Nu}	1.119	1.119	1.119	1.119	1.118
Nu_{max}	1.512	1.512	1.512	1.512	1.506
$(y/D)_{\text{max}}$	0.088	0.088	0.088	0.088	0.086
Nu_{min}	0.690	0.690	0.690	0.690	0.691
$(y/D)_{\text{min}}$	0.988	0.988	0.988	0.988	1.000
U_{max}	3.655	3.655	3.655	3.655	3.657
$(y/D)_{\text{max}}$	0.800	0.800	0.800	0.800	0.814
V_{max}	3.697	3.697	3.697	3.697	3.702
$(x/D)_{\text{max}}$	0.175	0.175	0.175	0.175	0.178
\bar{u}_{mid}	1.180	1.180	1.180	1.180	1.174
I	606	598	1 352	484	
t/t_{MSIMPLE}	1.08	1.37	2.43	1	

(下转第42页)

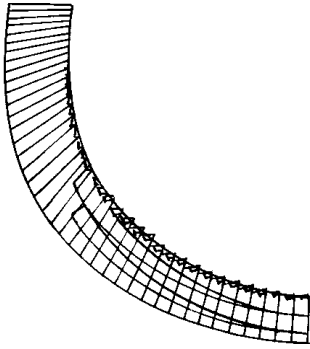


图5 荒加工刀轨排列实例

荒加工刀具半径范围为 $8 \text{ mm} < r_1 < 10 \text{ mm}$, 刀尖圆角半径 $r_f = 0.2 \text{ mm}$, 精加工余量为 0.2 mm . 给定荒加工切深为 3 mm , 粗加工切深为 2 mm , 设 $T_{ic} = 4 \text{ min}$, 为简化模型, 给出平均进给速度为 30 mm/min . 由于在同等情况下, 大尺寸的刀具可存在更高的进给速度, 所以本文给出的平均进给速度偏保守. 选择不同刀具组合, 计算各级加工的刀位轨迹, 得到的总加工时间见表1. 由表1可以看出, 刀具的优化组合在很大程度上还取决于换刀时间, 尤其在2种加工方案生成的刀轨长度相差不大时.

表1 刀具组合所需加工时间一览表

刀具组合	r_n/mm	r_{\min}/mm	L/mm			T_{to}/min	
1	8	4	222.281 5	1 275.425 0		50.4	
2	10	6	4	165.687 9	151.167 6	974.735 2	51.1
3		4		1 827.713 4		60.9	

5 结 论

针对整体叶轮五轴数控粗加工刀位轨迹的生成问题, 提出了一种刀位规划方案. 将多级荒加工的概念引入叶轮通道加工. 通过对叶轮通道的几何分析, 对通道分段进行荒加工, 即用大尺寸刀具去除主要毛坯裕量, 完成对通道扩槽加工的预处理, 再用小尺寸刀具对通道进行扩槽加工, 更有效地提高了加工效率, 缩短了加工时间. 因此, 建立了使总加工时间为最小的目标函数, 优化刀具的组合, 以完成整体叶轮的开槽加工及扩槽加工.

参考文献:

- [1] Yang D C H, Han Z. Interference detection and optimal tool selection in 3-axis NC machining of free-form surfaces [J]. *Computer Aided Design*, 1999, 31: 303 ~ 315.
- [2] Chih-Ching Lo. Two-stage cutter-path scheduling for ball-end milling of concave and wall-bounded surfaces [J]. *Computer Aided Design*, 2000, 32: 597 ~ 603.
- [3] Yuan-Shin Lee, Yawei Ma. Rolling-ball method and contour marching approach to identifying critical regions for complex surface machining [J]. *Computers in Industry*, 2000, 41: 163 ~ 180.

(编辑 管咏梅)

(上接第24页)

参考文献:

- [1] Patankar S V, Spalding D B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1972, 15: 1 787 ~ 1 806.
- [2] 陶文铨. 数值传热学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998. 275 ~ 285, 293 ~ 294.
- [3] Patankar S V. A calculation procedure for two-dimen-

sional elliptic situations [J]. *Numerical Heat Transfer*, 1981, 4: 409 ~ 425.

- [4] 帕坦卡 S V. 传热与流体流动的数值计算[M]. 张政, 译. 北京: 科学出版社, 1984. 142 ~ 152, 159, 168.
- [5] Macagno E O, Hung T K. Computational and experimental study of a captive annular eddy [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, 28(1): 43 ~ 64.

(编辑 王焕雪)