

文章编号 :0253 - 987X(2002)03 - 0221 - 05

二维各向异性非结构化网格的自动生成与应用

徐明海, 陶文铨

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 根据生成适体坐标网格空间变换的思想, 结合 Delaunay 非结构化网格生成技术, 实现了各向异性非结构化网格的生成. 剖分算例表明, 通过给定测度矩阵, 可以控制生成预期的网格. 针对各向异性导热问题的控制容积有限元法 (CVFE) 离散数值计算表明, 用各向异性网格比各向同性网格收敛快.

关键词: 非结构化网格; 各向异性; 测度矩阵; 导热; 数值解

中图分类号: O241 **文献标识码:** A

Generation and Application of 2D Anisotropic Unstructured Grids

Xu Minghai, Tao Wenquan

(School of Energy and Power Engineering, Xi an Jiaotong University, Xi an 710049, China)

Abstract: Based on the space transformation concept and the Delaunay triangulation method, an approach for generation of anisotropic unstructured grids was proposed. The application of such grid to numerical solution of heat conduction problem with anisotropic thermal conductivity reveals that such anisotropic grid is efficient to anisotropic heat conduction problem.

Key words: *unstructured grids; anisotropic; metric matrix; heat conduction; numerical solution*

各向异性网格是指在不同方向上有不同伸展度的网格, 这种网格在边界层流动与传热问题和各向异性材料导热等问题的数值计算中有应用价值. 文献中关于各向异性网格生成方法的研究还比较少, 文献[1]提出了采用控制网格的伸展程度、伸展方向和生长来生成各向异性网格的方法. 本文采用测度空间下的距离修正, 用 Delaunay 算法自动地生成了各向异性非结构化网格.

1 各向异性网格的生成算法原理

用 Delaunay 三角形化生成非结构化网格的关

键是距离度量, 要求三角形的外接圆不包含其他节点在内^[2]. 由于节点所在空间各方向的伸展度均匀一致, 故生成的单元也最大程度地满足了与方向无关的要求, 单元在形状上也更接近于正三角形. 各向异性网格是指网格单元沿某一方向的伸展度较大, 而沿另一方向的伸展度较小, 单元的形状扁平, 而不是接近于正三角形的网格. 若将欧几里德空间距离看成是一种测度为 1 的距离, 通过对距离计算施加测度不为 1 的修正, 可望在欧氏空间内生成各向异性网格. 在生成适体网格时^[3], 通过适当的变换可使物理平面内不规则的区域变换成计算平面内的矩形, 根据这种思想可以构造距离修正测度.

收稿日期: 2001 - 08 - 03. 作者简介: 徐明海(1964~), 男, 博士生, 现为华东石油大学副教授; 陶文铨(联系人), 男, 教授, 博士生导师. 基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目 (G2000026303); 国家自然科学基金资助项目 (50076034).

设欧氏空间为 (x, y) , 测度空间为 (u, v) , 二者满足对应关系 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. 欧氏空间某点 P 处微元距离的平方为

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (x_u du + x_v dv)^2 + (y_u du + y_v dv)^2$$

$$= (du, dv) \begin{pmatrix} x_u^2 + y_u^2 & x_u x_v + y_u y_v \\ x_u x_v + y_u y_v & x_v^2 + y_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du, dv) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (1)$$

根据反变换, 可得测度空间的距离为

$$d_M^2 = (dx, dy) \begin{pmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad (2)$$

由式(2)可见, 欧氏空间距离与测度空间距离相差一个矩阵修正, 这说明欧氏空间两点间的距离通过选择不同的变换, 在变换空间有不同的值. 反过来, 通过测度矩阵修正距离, 可使欧氏空间内不共圆的点在测度空间内共圆, 这样就可以利用 Delaunay 算法在测度空间内生成经典的非结构化网格, 再变换到欧氏空间内形成各向异性非结构网格.

可以看出, 当 $x = u, y = v$ 或 $x = v, y = u$ 时, $a = b = 1, c = 0$, 测度空间与欧氏空间的距离相等, 即测度距离就是欧氏距离. 当 $x = u, y = v$ 时, 相当于对整个区域 x, y 两个方向分别放大或缩小了 λ 倍, (x, y) 平面内的圆就成了 (u, v) 平面内的椭圆. 这从圆的方程可以看出: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \Rightarrow \lambda^2 (u - u_0)^2 + \lambda^2 (v - v_0)^2 = r^2$. 当变换是非线性时, 测度矩阵随位置而变, (x, y) 平面内的圆则不一定对应为椭圆, 当矩阵元素 a, b 和 c 满足 $ac - b^2 > 0$ 时, 对应的图形为闭合曲线. 测度空间内两点 A 与 B 间的距离 (D_M) 是微元距离 d_M 的积分

2 算法实施

2.1 测度距离近似

先回顾 Delaunay 三角形化算法的内核. 在由 i 个点构成的三角形网格系统 T_i 中, 插入一新点 P , 搜索此点所破坏的三角形集合 C , 去掉这些三角形, 得到围绕 P 点的空腔 C_P . 空腔 C_P 应是关于点 P 的星状多边形, 连接 P 与多边形的顶点, 构成新的单元集合 C_n , 从而形成网格系统 T_{i+1} , 用公式表示为

$$T_{i+1} = T_i - C_P + C_n \quad (3)$$

可以看出, 其关键之处在于构建空腔 C_P , 而在构建 C_P 的过程中, 需要计算点 P 到某个三角形 K 的外

接圆圆心的距离 d 和圆的半径 R_K . 这一过程隐含了两个问题, 即外接圆圆心的确定与半径的计算和点到圆心两点间的距离计算. 很明显, 假如在计算两点间的距离时, 沿不同的方向给予不同的放大、缩小因子, 再做 Delaunay 包含判断, 这样形成的网格就有一定的方向特性. 当把这种距离修正用于 Delaunay 网格生成时, 就可生成各向异性网格.

在寻找插点空腔时, 首先要建立测度空间的圆方程(确定圆心和圆半径), 然后做外接圆包含判断. 设 P_1, P_2 和 P_3 为三角形 K 的 3 个顶点, 寻找 O_K 使之到 P_1, P_2 和 P_3 等距离, 即

$$R_K = D_M(O_K, P_1) = D_M(O_K, P_2) = D_M(O_K, P_3) \quad (4)$$

由式(4)可以确定 O_K 和 R_K , 然后判断下式

$$M_{M,P}(P, K) = D_M(O_K, P) / R_K < 1 \quad (5)$$

是否成立即可. 以上过程即为 Delaunay 三角形化算法的内核.

求解式(4)是非常困难的, 因为它非线性积分方程组, 故只采用有限个点处的测度计算, 测度距离的近似式如下

$$\left. \begin{aligned} D_{M,P_1}(O_K, P_1) &= D_{M,P_2}(O_K, P_2) \\ D_{M,P_1}(O_K, P_1) &= D_{M,P_3}(O_K, P_3) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)与式(4)的差别在于计算 $D_{M,P}(O_K, P_i)$ 时, 前者的测度矩阵 M 从 O_K 到 P_i 是变化的, 而后者用 P_1, P_2, P_3 三点处的测度矩阵, 且在距离计算中为常数, 这样就大大地简化了计算, 但用于实际计算仍然是麻烦的. 为了进一步减少计算工作量, 采用的离散近似方式为

$$\left. \begin{aligned} D_{M,P}(O_K, P_1) &= D_{M,P}(O_K, P_2) \\ D_{M,P}(O_K, P_1) &= D_{M,P}(O_K, P_3) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)与式(5)结合, 可用于判断破坏的三角形. 式(7)与式(6)相比, 只是用到的测度矩阵不同, 式(7)只用插入点 P 处的测度, 可使计算进一步简化, 式(7)中的 P_1 是三角形 K 的 3 个顶点中不在插点空腔上的那个点.

另外有两种近似是用更多点的测度矩阵计算, 工作量有所增加, 它们是

$$M_{M,P}(P, K) + M_{M,P_1}(P, K) < 2 \quad (8)$$

$$M_{M,P}(P, K) + M_{M,P_1}(P, K) + M_{M,P_2}(P, K) + M_{M,P_3}(P, K) < 4 \quad (9)$$

式(5)、式(8)和式(9)都是有效的, 因为它们所形成的空腔是关于点 P 的星状多边形. 式(8)和式(9)与

式(5)的不同在于用到的测度矩阵 M 所选的位置不同. 也可以看出,各向异性网格的生成与各向同性网格不同,三角形的外接圆的圆心和半径与测度所用的取值点有关,还与插入点有关,因此在计算过程中它们都是临时的,没有必要保存. 数值实践表明,在距离计算中所用的测度矩阵越多越好,式(9)的效果最好,但计算量最大.

2.2 边界剖分

为了保证边界剖分与内部剖分都满足网格步长的要求,边界剖分也得依据测度要求完成. 边界剖分的基本思想是在测度空间内,把边界剖分成网格步长尽量接近于 1 的节点序列,剖分过程包括边界长度的计算和剖分两个步骤. 测度空间的计算曲线弧长实际上可以近似地认为是实际弧长与网格步长的比值,也就是曲线依步长分成的段数. 因为步长是随其在曲线上位置的不同而不同的,因此必须逐段计算,以体现这种特点.

设某一段边界如图 1 所示,起点和终点分别为 A 和 B ,其参数方程为 $x = x(t), y = y(t)$,网格控制空间对应的测度空间为 $M(x(t), y(t))$,则在测度空间内对应的弧长为

$$S_N = \int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) M(x, y) dt \quad (10)$$



图 1 某段边界示意图

式(10)只有在 M 、 x 和 y 的函数较为简单时,才能完成解析积分,为此本文采用数值积分,用迭代的办法求解.

弧长的计算步骤如下:

(1) 把 AB 分成 N 段, $t = 1/N, t_i = i/N, i = 0, 1, 2, \dots, N$;

(2) 计算每段的长度

$$S_i(x_i, y_i) = \{ [(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) M(x_i, y_i)]^{1/2} + [(\dot{x}_{i+1}^2 + \dot{y}_{i+1}^2) M(x_{i+1}, y_{i+1})]^{1/2} \} \cdot t/2 \quad (11)$$

计算弧长 $S_N = \sum_{i=0}^{N-1} S_i$

(3) 判断 S_N 与 N 的接近程度,如果 $N - 1 < S_N < N + 1$ 成立,停止计算;否则令 $N = \text{INT}(S_N)$,转到步骤(1).

这样计算所得的各个点并不能满足网格步长的

要求,因而不作为节点,仅供计算曲线在测度空间中的长度之用. 边界的剖分步骤为:

(1) 计算测度空间每段的弧长 $\bar{S}_i = S_N/N$,显然 \bar{S}_i 是非常接近于 1 的数;

(2) 从 $t_i = 0$ 开始,逐段计算 t_{i+1} ,使得 $S_i = \bar{S}_i$ 成立,可得该段边界的剖分节点, S_i 的计算与弧长的计算步骤(2)相同,因为 $t_i = 0$ 对应着 A 点, $t_N = 1$ 对应着 B 点,故只需计算确定 $t_i (i = 1, 2, \dots, N - 1)$.

2.3 内部节点的生成

按上述方法形成的初始 Delaunay 三角形网格,一般不能满足计算要求,需要在内部布置节点. 内点有许多生成方法,本文采用沿内边(指除边界边以外的边)布置的方式生成内点,步骤如下:

(1) 取某内边 AB 的阈值 ($\epsilon = 1.1$);

(2) 计算测度下的长度 $l_M(A, B)$,若 $l_M(A, B) > \epsilon$,把 AB 两等分,得中点 Q ;

(3) 进一步计算 $l_M(A, Q)$ 和 $l_M(Q, B)$,这一过程采用递归函数进行,若 $l_M(A, Q) > \epsilon$ 成立,则 $B = Q$,转步骤(2);若 $l_M(Q, B) < \epsilon$ 成立,则 $A = Q$,转步骤(2);否则,接受 Q 点为新插点的候补点;

(4) 遍历所有内边,执行步骤(2)和步骤(3),就得到本次网格系统的所有插入点的列表 NODELIST;

(5) 若 NODELIST 非空,则把所有点按照 Delaunay 网格的生成原则插入到网格系统中,转到步骤(1),完成下一轮点的生成与插入;若 NODELIST 为空,则停止计算.

在所生成的点中,不同边上的节点距离可能非常小,需要把 NODELIST 中两点的距离小于某一值的其中一点剔除,这样生成的网格基本上不需进行优化. 另外,为减少计算工作量,对边进行标识,对于长度满足阈值要求的边标记其属性为 1,否则为 0,这样可对属性为 0 的边进行操作.

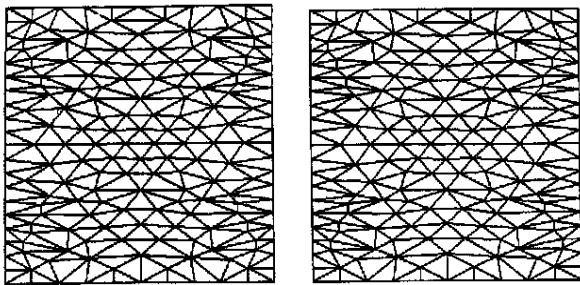
3 部分算例及应用

3.1 测度距离近似的影响

利用测度空间的 Delaunay 三角形化剖分方法,编制了剖分程序,针对几种区域和不同的测度图,进行了剖分检验. 为了比较式(5)、式(8)和式(9)对剖分结果的影响,针对边长为 1 的方形区域,在测度矩

阵 $M_1 = \begin{bmatrix} h_x^{-2} & 0 \\ 0 & h_y^{-2} \end{bmatrix}$, 网格步长 $h_x = 0.1, h_y = 0.5 h_x$ 的情况下进行了剖分计算(见图 2).

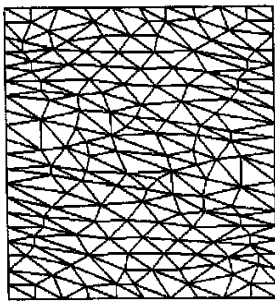
从图2可以看出,用式(5)和式(9)做测度距离近似,剖分结果相差不大,但在用式(9)时计算量稍大一些.



(a) 用式(5)做包含原则 (b) 用式(9)做包含原则
图2 测度距离近似的影响

3.2 测度矩阵的影响

为检验测度矩阵对网格系统的影响,还取边长为1的方形域作为剖分目标,但所用的测度矩阵不同(用式(9)作为测度距离近似).取网格步长 $h_x = 0.1$, $h_y = 0.5 h_x$,在测度矩阵 M_1 和 M_2 分别为 $\begin{bmatrix} h_x^{-2} & (3h_x h_y)^{-1} \\ (3h_x h_y)^{-1} & h_y^{-2} \end{bmatrix}$ 两种情况下,进行了剖分,结果如图3所示.虽然在两个方向采用的网格步长与图2b相同,但用图3与图2b相比可以看出,测度阵不同,生成的网格差别是比较明显的.



3 测度矩阵为 M_2 时的结果

为了进一步检验程序的有效性,针对一个圆环区域进行了剖分,并希望网格沿周向比径向的步长大一些,切内圆处的网格步长较外圆处的小,并要求二者的比值均匀.

取测度矩阵

$$M = \begin{bmatrix} h^{-2}(1+4x^2) & 4xyh^{-2} \\ 4xyh^{-2} & h^{-2}(1+4y^2) \end{bmatrix}$$

这里测度矩阵随点的位置不同而不同,并且变化是非线性的,图4所示是剖分结果.可以看出,生成的网格基本达到了设计要求.

上述方法还用来生成了更复杂区域中的各向异性网格,限于篇幅,仅举图5所示为例.

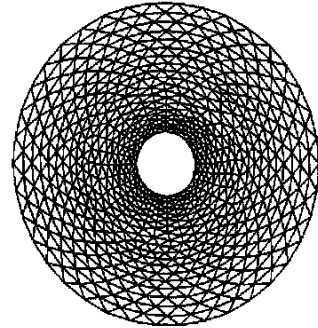


图4 同心圆的剖分结果

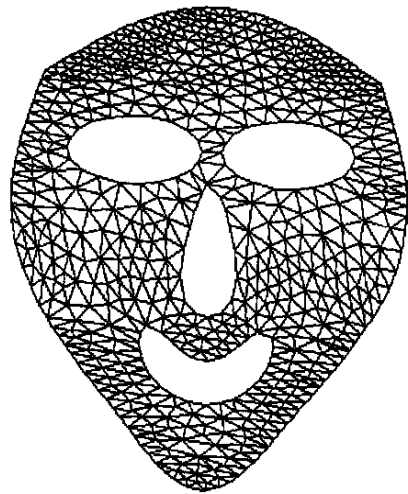
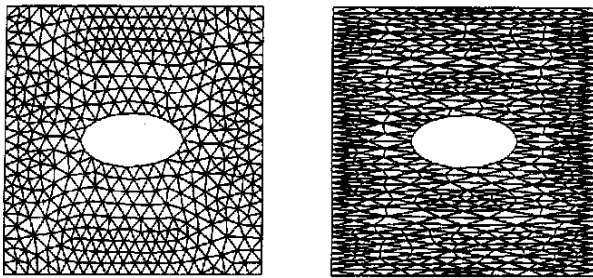


图5 复杂区域各向异性网格举例

4 应用举例

为了进一步检验各向异性网格的应用,针对一个矩形区域中心有一个椭圆孔的两个导热问题,进行了数值计算,如图6所示.外边界温度为0 K,内边界温度为100 K.材料的导热系数 $k_x = 5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, $k_y = 1.0 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$,用各向异性和同性网格分别进行了计算.图6a为各向异性网格,网格步长 $h = 0.45$,节点数 $N_p = 465$,单元数 $N_E = 822$.图6b为各向异性网格,节点数 $N_p = 464$,单元数 $N_E = 788$,网格步长 $h_x = 0.1$, $h_y = h_x/5.0$.用上述两种网格求解了此问题,采用CVFE方法离散微分方程.在求解时,各向异性网格节点数 $N_p = 1653$,单元数 $N_E = 3044$,各向同性网格节点数 $N_p = 1657$,单元数 $N_E = 3090$.在相同的求解方法下,收敛过程曲线如图7所示.图7表明,对各向异性导热问题,使用各向异性网格有利于迭代收敛.



(a) 各向同性网格 (b) 各向异性网格
图 6 各向同性及各向异性网格的对比

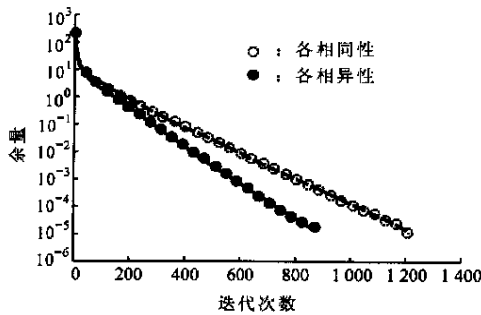


图 7 两种网格的迭代收敛过程

5 结 论

通过利用距离测度修正,用 Delaunay 网格生成技术,实现了各向异性网格的生成. 网格的形状可以通过给定测度分布图的方式来控制,与欧氏空间的 Delaunay 剖分技术相比,计算工作量明显增加,经典的 Delaunay 网格生成算法可以认为是本算法的简化. 通过对各向异性材料的导热问题进行计算表明,对于各向异性问题,采用各向异性网格求解的收敛速度要比采用各向同性网格的收敛速度快.

参考文献:

- [1] Peraire J, Peiro J, Formaggia L, et al. Finite element Euler computations in three dimensions [J]. Int J Numer Meth Eng, 1988, 26(15): 2 135 ~ 2 159.
- [2] 陶文铨. 计算传热学的近代进展 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [3] 陶文铨. 数值传热学 [M]. 第 2 版. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.

(编辑 王焕雪)

《西安交通大学学报》关于奖励优秀论文的通知

根据科技部科技信息研究所的统计,《西安交通大学学报》编辑部对 1999 年、2000 年在《西安交通大学学报》发表的论文的被引用情况进行了分析. 分析结果表明:一年来,学报论文的水平有所提高,引文频次有所增加,刊物的影响因子由 1999 年的 0.172 提高为 0.198. 为了继续得到了广大作者的支持,提供高质量的论文,以提高引文频次,扩大研究成果的影响面,现决定对 1999 年、2000 年发表在《西安交通大学学报》被引用频次较高的论文予以奖励,授予以下论文“《西安交通大学学报》2001 年度优秀论文称号”并给予 700 至 500 元的奖励(其中 500 元只能用做以后在本刊发表论文的版面费,获奖名单见本刊网页).

西安交通大学学报编辑部

2001 年 12 月 30 日