第 22 卷第 6 期 工 程 热 物 理 学 报 Vol.22, No.6
2001 年 11 月 JOURNAL OF ENGINEERING THERMOPHYSICS Nov., 2001

边界条件对对流扩散方程数值稳定性的影响

刘 星 王秋旺 陶文铨

（西安交通大学能源与动力工程学院， 陕西 西安 710049）

摘 要 本文利用数值计算方法对采用均分网格的一维线性无源的对流－扩散方程在各种边界条件下的稳定性进行了分析，并求出了不同边界条件下一维问题的中心差分和 QUICK 格式的临界网格 Peclet 数。指出按现有方法得出的临界网格 Peclet 数是判别差分格式对流数值稳定性的最苛刻的要求。对中心差分和 QUICK 格式，除两点边值问题以外的其它边界条件下的稳定性范围均不小于或远远大于两点边值问题的稳定性范围。通过计算还得出了格式的数值稳定性主要取决于计算区域下游侧的边界条件类型而与计算区域上游侧的边界条件类型无关的结论。

关键词 离散格式；对流项；稳定性；Peclet 数
中图分类号：TK124 **文献标识码**：A **文章编号**：0253-231X(2001)06-0729-04

DISCUSSION ON THE CONVECTIVE NUMERICAL STABILITY OF CONVECTION–DIFFUSSION EQUATION — THE EFFECT OF THE BOUNDARY CONDITIONS

LIU Xing WANG Qiu-Wang TAO Wen-Quan

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract The stability of one-dimensional discretized convection-diffusion equation was analyzed at different boundary conditions. All the existing analysis methods are based on five assumptions: one-dimensional, linear, source-free, uniform grid and first kind boundary condition. It is found that the critical grid Peclet number based on the existing analysis method is the most severe requirement for convective stability. Computations were carried out for CDS and QUICK schemes, and much larger critical grid Peclet number were obtained for non-first king boundary conditions. It is also found that the stability of the discretized scheme is only dependent on the boundary condition at the downstream end of the computational region.

Key words discretized scheme; convective term; stability; Peclet Number

1 引 言

对流扩散方程中对流项离散格式的稳定性是指数值计算中离散方程不会产生振荡解的特性。有些对流项的离散格式是绝对稳定的，即不论网格 Peclet 数有多大均不会得到振荡的解；而另一些对流项的离散格式是条件稳定的，即存在一个临界网格 Peclet 数，当格式的网格 Peclet 数超过临界网格 Peclet 数时，解就会发生振荡。对流扩散方程的对流数值稳定性与解的准确性和经济性一起表示格式的重要特性。在文献 [1] 中对一维对流扩散方程的两点边值问题的稳定性进行了分析，并得出了中心差分 (CDS) 的临界网格 Peclet 数为 2，对 QUICK 格式的临界网格 Peclet 数为 8/3(≈2.667) 的结论。近年来有一系列的计算结果表明，对一些问题采用中心差分，即使网格 Peclet 数大于 2；采用 QUICK 格式，即使网格 Peclet 数大于 8/3，仍能得到稳定的解 [2~5,10,11]。那么是什么原因导致一维问题的理论分析与实际计

收稿日期：2001-02-01；修订日期：2001-08-17
基金项目：教育部高等学校博士学科点专项基金资助项目 (No.98069835)；国家自然科学基金资助项目 (No.59806011)
作者简介：刘 星 (1960-)，男，湖北武汉人，在职博士研究生，主要从事传热强化和计算传热方面的研究。

算结果之间存在这么大的差距呢？计算传热学发展到今天，我们有必要研究现有的理论分析与实际计算结果之间有哪些不一致，并找出不一致的原因。只有这样我们才能获得判别实际问题的对流项离散格式稳定性的判据。

2 物理问题

现有的对流项离散格式稳定性的分析是对一维对流 - 扩散方程进行的 [1,6~9]。其前提条件是：(1) 一维问题，(2) 线性偏微分方程，(3) 无源项，(4) 网格均分，(5) 两点边值问题。而实际问题通常不能全部满足这五个条件。本文试图通过计算来分析边界条件对格式稳定性的影响。在以下的计算中扩散项均采用中心差分。以下所称的不同格式均指对流项的离散格式不同。本文采用区域离散方法 B(即内节点法)，节点数为 40。文中的计算结果均保留小数点后第三位有效数字。判断格式是否稳定的标准是考察方程的解是否具有物理意义。

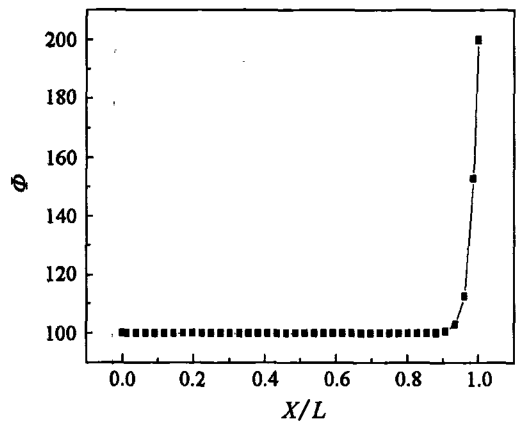
一维对流 - 扩散方程如下式所示：

$$\rho u\frac{\partial\phi}{\partial X}=\Gamma\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 X}$$

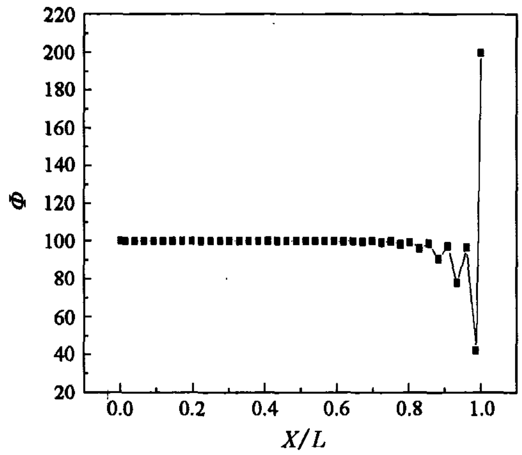
式中 ϕ 为通用变量，u 为流速，X 为几何尺度，ρ 为密度，Γ 为扩散系数。

3 边界条件的影响

图 1(a) 和图 1(b) 分别表示一维对流 - 扩散方程采用中心差分格式在两点边值条件下网格 Peclet 数为 1.232 时的稳定解的形态和网格 Peclet 数为 5.542 时的非稳定解的形态。



(a) Pe=1.232



(b) Pe=5.542

图 1 中心差分的稳定形态和非稳定形态

各种边界条件下中心差分和 QUICK 格式的临界网格 Peclet 数的计算结果见表 1。

表 1 各种边界条件下的计算结果

序号	边界条件类型		临界网格 Peclet 数	
	$X=0$	$X=L$	中心差分	QUICK
1	$\phi=\phi_0$	$\phi=\phi_L$	2.000	2.668
2	$\frac{\partial\phi}{\partial X}=0$	$\phi=\phi_L$	2.000	2.667
3	$\frac{\partial\phi}{\partial X}=\alpha(\phi-\phi_0)$	$\phi=\phi_L$	2.000	2.667
4	$\phi=\phi_0$	$\frac{\partial\phi}{\partial X}=0$	4.071	2460000*
5	$\frac{\partial\phi}{\partial X}=\alpha(\phi-\phi_0)$	$\frac{\partial\phi}{\partial X}=0$	4.070	12000000*
6	$\phi=\phi_0$	$\frac{\partial\phi}{\partial X}=\alpha(\phi-\phi_L)$	2.020	2.734
7	$\frac{\partial\phi}{\partial X}=0$	$\frac{\partial\phi}{\partial X}=\alpha(\phi-\phi_L)$	2.034	2.764

*：此处网格 Peclet 数很大，仅表示在此范围内格式是稳定的。

3.1 讨论

通过数值计算，对两点边值问题 (表 1 中序号 1)，可以得出中心差分的临界网格 Peclet 数为 2.000，而 QUICK 格式的临界网格 Peclet 数为 2.668。上述的计算结果是与文献 [1] 中的理论推导相一致的，这也验证了本文中计算方法的正确性。

对计算区域的边界条件分别是第一类和第二类的情况，如上游侧是第一类边界条件，下游侧是第二类边界条件 (表 1 中序号 4)，对中心差分其临界网格 Peclet 数为 4.071，而对 QUICK 格式其临界网格 Peclet 数很大，直到 Peclet 数等于 2460000 时仍是稳定的。其原因是，当下游侧边界条件是第二类边界条件条件时，由于下游的影响传递不上来，从而使格式的稳定性范围大大地拓宽了。当上游侧是第二类边界条件，下游侧是第一类边界条件 (表 1 中序号 2)，对于中心差分其临界网格 Peclet 数为 2.000, 而对于 QUICK 格式其临界网格 Peclet 数为 2.667。尽管存在第二类边界条件，但由于其处于上游侧边界，所以并未对拓宽格式的稳定性范围产生影响，倒是下游侧边界的第一类边界条件决定了格式的稳定性范围。

当计算区域上游侧是第一类边界条件，下游侧是第三类边界条件时 (表 1 中序号 6)，对于中心差分其临界网格 Peclet 数为 2.020 而对于 QUICK 格式其临界网格 Peclet 数为 2.734。和前面的计算结果进行比较，可以看出，下游侧边界为第三类边界条件时，格式的稳定性范围小于第二类边界条件时的稳定性范围，但大于第一类边界条件时的稳定性范围。

当计算区域上游侧是第三类边界条件，下游侧是第二类边界条件时 (表 1 中序号 5)，对于中心差分其临界网格 Peclet 数为 4.070, 而对 QUICK 格式其临界网格 Peclet 数很大，直到 Peclet 数等于 12000000 时仍是稳定的。这又是一个下游侧第二类边界条件拓宽了对流扩散方程稳定性范围的例子。

3.2 除流速以外的其它参数对稳定性的影响

在上述数值计算中，都是通过改变流速 u 来考察离散格式的稳定性的。由网格 Peclet 数的定义：

$$Pe = \frac{\rho u \Delta X}{\Gamma}$$

除改变流速 u 外，还可以通过改变几何尺度 ΔX、密度 ρ 以及扩散系数 Γ 来考察格式的稳定性。以下通过具体计算实例来进行说明。

对两点边值问题：在保持流速不变的条件下，依次改变几何尺度 ΔX、密度 ρ 以及扩散系数 Γ 来考察格式的稳定性，均有下列结论：

中心差分的网格 Peclet 数为 2.000;

QUICK 格式的网格 Peclet 数为 2.668。

对计算区域两侧的边界条件分别是第一类和第二类的情况：

当上游侧是第二类边界条件、下游侧是第一类边界条件时，在保持流速不变的条件下，依次改变几何尺度 ΔX、密度 ρ 以及扩散系数 Γ 来考察中心差分的稳定性，均有下列结论：

中心差分的网格 Peclet 数为 2.000。

当上游侧是第一类边界、下游侧是第二类边界时，在保持流速不变的条件下，依次改变几何尺度 ΔX、密度 ρ 以及扩散系数 Γ 来考察中心差分的稳定性，有下列结论：

改变几何尺度 ΔX：临界网格 Peclet 数为：4.098;

改变密度 ρ：临界网格 Peclet 数为： 4.062;

改变扩散系数 Γ：临界网格 Peclet 数为：3.780。

综上所述，不论改变流速 u，还是改变几何尺度 ΔX、密度 ρ 以及扩散系数 Γ, 都不会改变离散格式的稳定性范围，换句话说，以上各个变量对格式的稳定性的影响是基本相同的。

4 结　论

(1) 对中心差分临界网格 Peclet 数等于 2、对 QUICK 格式临界网格 Peclet 数等于 8/3 的结论是对一维对流 - 扩散方程的两点边值问题的稳定性进行理论分析得出来的，这是稳定性范围最窄的一种情况。有别于此的其它类型的边界条件下的稳定性的范围均不小于这个范围，通常要比这个范围大许多。

(2) 在同样的边界条件下， QUICK 格式的稳定性要好于中心差分，或者说， QUICK 格式的稳定范围要大于中心差分的稳定范围。

(3) 不论改变流速 u，还是改变几何尺度 ΔX、密度 ρ 以及扩散系数 Γ, 对离散格式的稳定性的影响是基本相同的。

(4) 计算区域下游侧边界的边界条件决定了格式的稳定性的范围，而上游侧边界的边界条件与稳定性无关。当下游侧边界是第二类边界条件时，格式的稳定性范围被大大地拓宽了。

参　考　文　献

[1] 陶文铨. 数值传热学. 西安：西安交通大学出版社， 1988.

220–231

[2] Shyy W, Thakur S, Wright J. Second-Order Upwind and Central Difference for Recirculating Flow Computation. AIAA J, 1992, 30: 923–932

[3] Lilek Z, Muzaferija S, Peric M. Efficiency of Difference Schemes and Accuracy, Aspects for a Full-Multigrid SIMPLE Algorithm for Three-Dimensional Flows. Numerical Heat Transfer, Part B, 1997, 31: 23–42

[4] Kong H, Choi H, Lee J S. Effects of Difference Schemas and Boundary Treatment on Accuracy of Solution of the Navier-stokes Equations. In: Proceedings of ASTP 10, Tokyo, 1997, 3: 845–850

[5] Li Z Y, Hong T C, Tao W Q. Numerical Simulation of Heat Transfer at an Array of Co-planar Slot-like Surfaces Oriented Normal to a Forced Convection Flow. Int. J. Computer Applications in Technology, 2000, 13(6): 285–294

[6] 帕坦卡 S V. 传热与流体流动的数值计算. 张政译. 北京: 科学出版社, 1989

[7] Gresho P M, Lee R L. Don't Suppress the Wiggles-They're Telling You Something. Comput. Fluids, 1981, 9: 223–251

[8] Leonard B P. A Survey of Finite Differences with Upwind for Numerical Modeling of the Incompressible Convection Diffusion Equation. In: Eds. Taylor C, Morgan K. Computational Techniques in Turbulent Flow, Swansea: Prinerdge Press, 1981. 1–35

[9] Tao W Q, Sparrow E W. The Transportive Property and Convective Numerical Stability of the Steady State Convection-Diffusion Finite Difference Equation. Numerical Heat Transfer, 1987, 11: 491-497

[10] 陶文铨, 宇波, 刘士来等. 对流项离散格式数值稳定性的讨论. 哈尔滨工业大学学报, 1999, 31: 15–18

[11] 陶文铨. 计算传热学的近代进展. 北京: 科学出版社, 2000