

一种非结构化同位网格算法

宇波 王秋旺 林明杰 陶文铨

(西安交通大学能源与动力工程学院 西安 710049)

摘 要

本文介绍了任意网格系统中的 SIMPLE 算法的推导过程,并将此算法应用于二维非结构化网格(三角形网格)之中,网格由 DELAUNAY 三角化方法生成。对顶盖驱动空腔流的计算表明该算法是令人满意的。

关键词 非结构化, 同位网格, SIMPLE 算法

1 引 言

有限容积法由于其良好的守恒性而成为数值计算中广为采用的一种方法^[1],本文采用这种方法来离散控制方程,所有的求解变量都置于一套网格中,即采用同位网格系统。采用 Rhie & Chow^[2]提出的方法来消除不合理的压力场,文献[3]中指出,只要在计算过程的任何一个步骤中引入相邻两点的压差,就可以避免出现不合理的压力场。本文运用这种思想,仅在求解动量方程中采用动量插值来确定界面流速,而在求解连续性方程中界面流速的确定采用线性插值。

2 网格的生成和控制方程的离散

本文中采用 DELAUNAY 三角化的方法来生成非结构化网格。对于顶盖驱动空腔流,可以得到图 1 所示的三角形网格。

对流换热数值计算中所研究方程的稳态形式均可以写成如下形式:

$$\int_S (\rho\phi v - \lambda_\phi \nabla \phi) \cdot dS = \int_V Q_\phi dV \quad (1)$$

对流项 扩散项 源项

其中 ϕ 为广义变量(速度、温度、紊动能等), λ_ϕ 为广义扩散系数, Q_ϕ 为广义源项。广义源项包括不能归于对流项、扩散项中的一切其它项。

将此方程应用于控制容积 V_{P_0} 中得:

$$\sum_{j=1}^n \int_{S_j} (\rho\phi v - \lambda_\phi \nabla \phi) \cdot dS = \int_{V_{P_0}} Q_\phi dV \quad (2)$$

其中 n 是节点 P_0 四周的界面。下面分别对对流项、扩散项和源项进行离散。

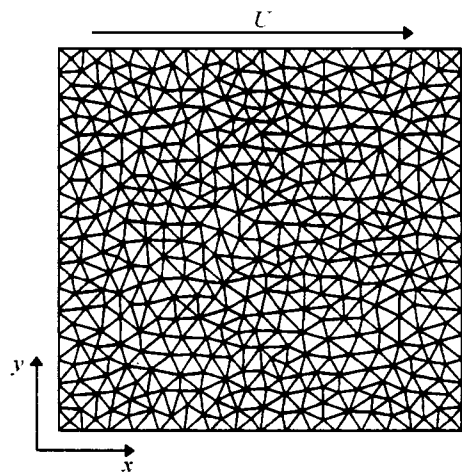


图 1 网格划分

国家自然科学基金资助项目。

本文曾于 1997 年 10 月在重庆召开的中国工程热物理学会传热传质学学术会议上宣读。

修改稿于 1998 年 2 月 18 日收到。

对流项 C_j :

$$C_j = \int_{S_j} \rho v \phi \cdot dS = (\rho v \phi)_j \cdot S_j = (\rho v)_j \cdot S_j \phi_j = F_j \phi_j \quad (3)$$

其中 F_j 为通过界面 S_j 的质量流量。要指出的是, 求解 F_j 所用界面 S_j 的流速 v_j 通过特殊的动量插值得到, 见式 (17)。

扩散项 D_j :

$$D_j = - \int_{S_j} \lambda_\phi \nabla \phi \cdot dS \approx -\lambda_{\phi_j} \nabla \phi_j \cdot S_j \quad (4)$$

其中界面上 ϕ 的梯度通过以下插值公式求得:

$$\nabla \phi_j = \omega_{P_0} \nabla \phi_{P_0} + \omega_{P_j} \nabla \phi_{P_j} \quad \omega_{P_0}, \omega_{P_j} \text{ 为权系数}$$

源项:

$$\int_{V_{P_0}} Q_\phi dV = Q_\phi^{P_0} V_{P_0} \quad (5)$$

其中 $Q_\phi^{P_0}$ 为控制容积源项的平均值。

3 差分格式及离散方程的最终形式

从上面的推导可以看出, 只要界面的 ϕ_j 值和 $\nabla \phi_j$ 值知道, 离散的代数方程就可以完全确定下来, 不同 ϕ_j 值和 $\nabla \phi_j$ 值的确定方法就形成了不同的差分格式。本文中假设 ϕ 值是线性变化的。也就是:

$$\phi(x) = \phi_{P_0} + (\nabla \phi)_{P_0} \cdot (x - x_{P_0}) \quad (6)$$

采用最小二乘法的思想^[4], 通过使得用本公式求得的邻点值与实际值之差的平方和达到最小来确定 $\nabla \phi_{P_0}$ 值。也就是要满足:

$$\frac{\partial}{\partial (\nabla \phi)_{P_0}^i} \sum_{j=1}^n [\phi_{P_j} - \phi(x_{P_j})]^2 = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

其中 $\phi(x_{P_j})$ 是通过表达式计算所得值, ϕ_{P_j} 为节点处的实际大小, $(\nabla \phi)_{P_0}^i$ 是矢量 $(\nabla \phi)_{P_0}$ 的直角坐标系的第 i 个分量。这种通过最小二乘法的思想来获得节点梯度的方法, 对任意的网格系统都是适用的。通过泰勒展开法可以证明由 (7) 式得到的梯度只有在均分网格时具有二阶精度, 为了在非均分网格上也具有二阶精度, 应该考虑距离向量模 $|d_j| = |x_{P_j} - x_{P_0}|$ 的影响, 于是有:

$$\frac{\partial}{\partial (\nabla \phi)_{P_0}^i} \sum_{j=1}^n \frac{1}{|d_j|} \left[\frac{\phi_{P_j} - \phi_{P_0}}{|d_j|} - (\nabla \phi)_{P_0} \cdot \frac{d_j}{|d_j|} \right]^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

代数方程 (8) 可以用矩阵 $(\nabla \phi)_{P_0} = G^{-1}h$ 来表示。 G 和 h 的计算方法如下:

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^n \frac{d_j^k \cdot d_j^l}{|d_j|^3} \quad h_k = \sum_{j=1}^n \frac{\phi_{P_j} - \phi_{P_0}}{|d_j|} \cdot \frac{d_j^k}{|d_j|^2} \quad (9)$$

实际实施过程中采用如下修正表达式求 $\nabla \phi_j$:

$$\nabla \phi_j^* = \nabla \phi_j - \left(\nabla \phi_j \frac{d_j}{|d_j|} - \frac{\phi_{P_j} - \phi_{P_0}}{|d_j|} \right) \frac{d_j}{|d_j|} \quad (10)$$

有了以上表达式, 扩散项的离散就完全确定了。

界面上的物理量 ϕ_j 可采用如下两种方法:

(1) 一阶迎风

$$\phi_j = \begin{cases} \phi_{P_0} & F_j \geq 0 \\ \phi_{P_j} & F_j < 0 \end{cases} \quad (11)$$

(2) 中心差分

$$\phi_j = \phi_{P_0} + \nabla \phi_j (x_j - x_{P_0}) \quad (12)$$

上述两种格式可写成如下通一形式:

$$\phi_j = \begin{cases} \phi_{P_0} + \{\gamma \nabla \phi_j \cdot (x_j - x_{P_0})\} & F_j \geq 0 \\ \phi_{P_j} + \{\gamma \nabla \phi_j \cdot (x_j - x_{P_j})\} & F_j < 0 \end{cases} \quad (13)$$

当 $\gamma = 0$ 为一阶迎风, $\gamma = 1$ 为中心差分.

源项采用局部线性化的方法处理, 即:

$$Q_\phi^{P_0} V_{P_0} = (a Q_\phi \phi_{P_0} + b Q_\phi) V_{P_0} \quad a Q_\phi \leq 0 \quad (14)$$

于是, 可以得到方程的系数表达式如下:

$$a_j = \frac{\lambda_{\phi_j}}{|d_j|^2} (d_j \cdot S_j) + [\max(F_j, 0) - F_j] \quad a_0 = -a Q_\phi + \sum_{j=1}^n a_j \quad (15)$$

$$b_\phi = \sum_{j=1}^n \lambda_{\phi_j} [\nabla \phi_j - (\nabla \phi_j \cdot \frac{d_j}{|d_j|}) \frac{d_j}{|d_j|}] \cdot S_j + \sum_{j=1}^n \gamma \nabla \phi_j \cdot [(x_j - x_{P_0}) \max(F_j, 0) + (x_j - x_{P_j}) \max(-F_j, 0)] + b Q_\phi \quad (16)$$

3 压力修正算法

4.1 界面流速的插值

本文计算采用同位网格, 界面速度采取文献 [2] 提出的动量插值方法进行计算:

$$v_j = v_{P_0j} + K_j \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla P_{P_0})_{d_j} + (\nabla P_{P_j})_{d_j}] - \tilde{\nabla} P \right\} \frac{S_j}{|S_j|} \quad (17)$$

其中: $v_{P_0j} = \omega_{P_0} v_{P_0} + \omega_{P_j} v_{P_j}$, $(\nabla P)_{d_j} = \nabla P \cdot \frac{d_j}{|d_j|}$, $\tilde{\nabla} P = \frac{P_{P_j} - P_{P_0}}{|d_j|}$, $K_j = \frac{1}{2} [(\frac{V}{a_0})_{P_0} + (\frac{V}{a_0})_{P_j}]$.

4.2 SIMPLE 算法

本文计算采用 SIMPLE 算法, 其关键在于如何构造合理的压力修正方程^[1]. 由高斯定理可知 $\sum_{j=1}^n P_j S_j = V_{P_0} \nabla P_{P_0}$, 故动量方程可表达成以下形式:

$$a_0 v_{P_0} - \sum_{j=1}^n a_j v_{P_j} = b_v - V_{P_0} \nabla P_{P_0} \quad (18)$$

根据动量方程, 很容易得到如下界面速度修正表达式:

$$v_{j\text{new}} = v_{j\text{old}} - \left(\frac{\bar{V}}{a_0} \right) \frac{S_j}{|d_j| |S_j|} (P'_{P_j} - P'_{P_0}) \quad (19)$$

将上式代入连续性方程： $\sum_{j=1}^n \rho v_j \cdot dS = 0$ ，得到压力修正方程：

$$A^P P' = b^P \quad \text{其中 } a_j^P = -\rho \left(\frac{\bar{V}_j}{a_0^P} \right) \frac{|S_j|}{|d_j|} \quad a_0^P = -\sum_{j=1}^n a_j^P \quad b^P = \sum_{j=1}^n F_j^{\text{old}} \quad (20)$$

要指出的是，界面流量 F_j^{old} 按线性插值得到的界面速度求得，而不采用动量插值。动量插值仅用于动量方程的离散。后面的算例发现采用这种处理方法能够检测出不合理的压力波，这说明只要在计算过程的任何一步能保证压力与速度不失耦，就能够得到合理的压力场^[3]。求解压力修正方程，得到 P' 。然后修正压力和速度：

$$v_{\text{new}} = v_{\text{old}} + \left(\frac{V}{a_0^v} \right) \nabla P' \quad P_{\text{new}} = P_{\text{old}} + \alpha_P P' \quad (21)$$

SIMPLE 算法的计算步骤见文献 [1]。

5 算 例

顶盖驱动空腔流是一个常用来考核程序的典型算例。采用类似于图 1 所示的网格 (实际计算单元为 6289 个) 进行计算，相当于结构化网格 80×80 的网格，分别对 $Re = 400, 1000$ 两种情况进行求解。图 2 显示了 $x/L = 0.5$ 截面上 u 速度的分布和 $y/L = 0.5$ 截面上 v 速

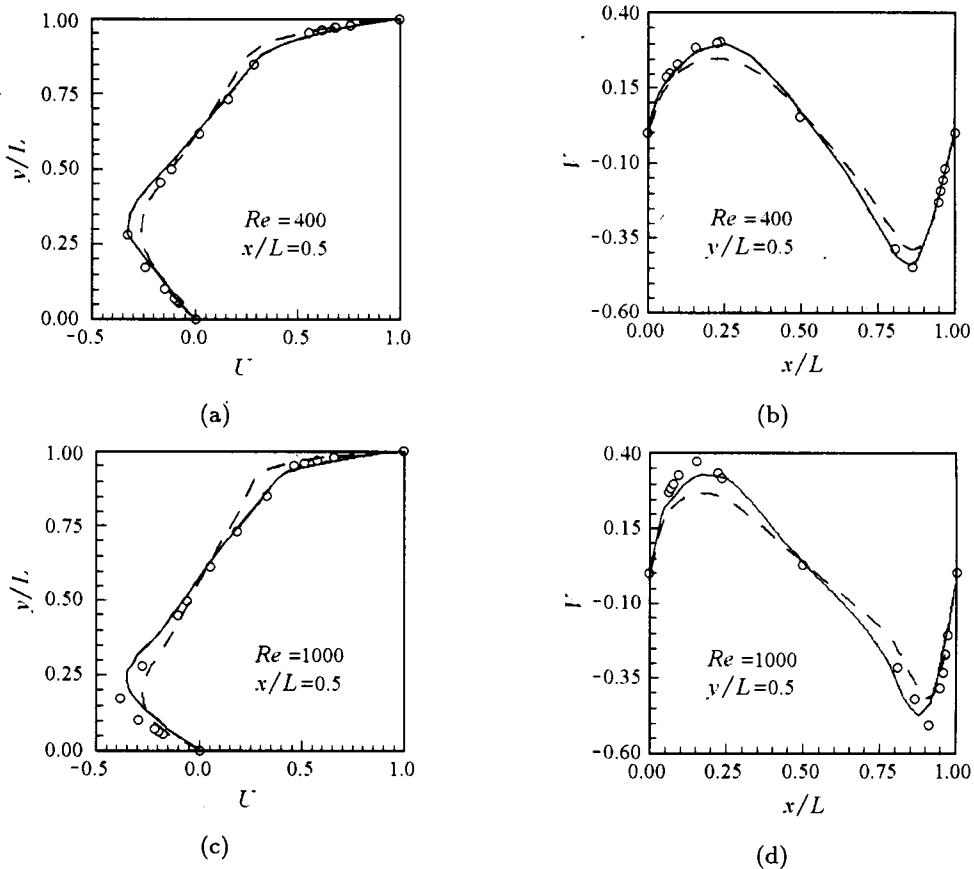


图 2 计算结果的比较

○○○○○ 基准解 - - - - 结构化网格计算结果 ——— 非结构化网格计算结果

度的分布及其与基准解^[6]的比较。由图可见,二者吻合较好。与结构化 80×80 的同位网格的计算结果(图2)相比较可以看出,两者的计算结果很接近。采用这种非结构化同位网格算法的准确度稍优。计算中还发现仅在动量方程中界面流速采用动量插值就可以消除不合理的压力场,不必要求界面流速插值在连续性方程中也采用动量插值。限于篇幅,本文只给出了一个算例。

6 结 论

通过上述算例和作者调试其他算例的结果表明,采用上述非结构化网格 SIMPLE 算法,计算结果的精度稍优于相同网格单元数下结构化网格的计算精度。并且进一步证实了这样一个观点:只要在计算中某一处能保证压力速度不失稳,就能够得到合理的压力场。

参 考 文 献

- [1] 陶文铨. 数值传热学. 西安: 西安交通大学出版社, 1987
- [2] Rhie C M, Chow W L. A Numerical Study of the Turbulent Flow Past Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation. AIAA, 1983, 21:1525-1532
- [3] 王秋旺. 倾斜封闭立方腔内多块孤立平板的自然对流换热. [博士论文]. 西安: 西安交通大学, 1996
- [4] Samir Muzaferija. Adaptive Finite Volume Method for Flow Prediction Using Unstructured Meshes and Multigrid Approach. [Doctor Thesis]. England: Imperial College of Science, Technology & Medicine, Department of Mechanical Engineering, 1994
- [5] Khosla P K, Rubin S G. A Diagonally Dominant Second-Order Accurate Implicit Scheme. Comput. Fluids, 1974, 2: 207
- [6] Ghia U et al. High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. J. Comp. Phys., 1982, 48: 387

AN UNSTRUCTURED ALGORITHM ON COLOCATED GRID SYSTEM

YU Bo WANG Qiuwang LIN Mingjie TAO Wenquan

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract

In this paper, the SIMPLE algorithm on arbitrary grid system was obtained, where the grid was generated by DELAUNAY method. The computational results of lid-driven cavity flow based on the present algorithm agreed with the benchmark solution very well.

Keywords unstructured mesh, colocated grid system, SIMPLE algorithm