

计算传热学的近代进展

第九章 FVM数值解的误差分析



主讲 陶文铨

西安交通大学能源与动力工程学院
热流中心 CFD-NHT-EHT CENTER
2022年6月7日, 西安

第九章目录

9.1 数值解误差的分类及计算结果的考核

9.2 基准解

9.3 离散格式截断误差的分析

9.4 Richardson外推法

9.5 网格收敛性指标及迭代不完全误差分析

9.1 数值解误差的分类及计算结果的考核

9.1.1 数值解误差的分类

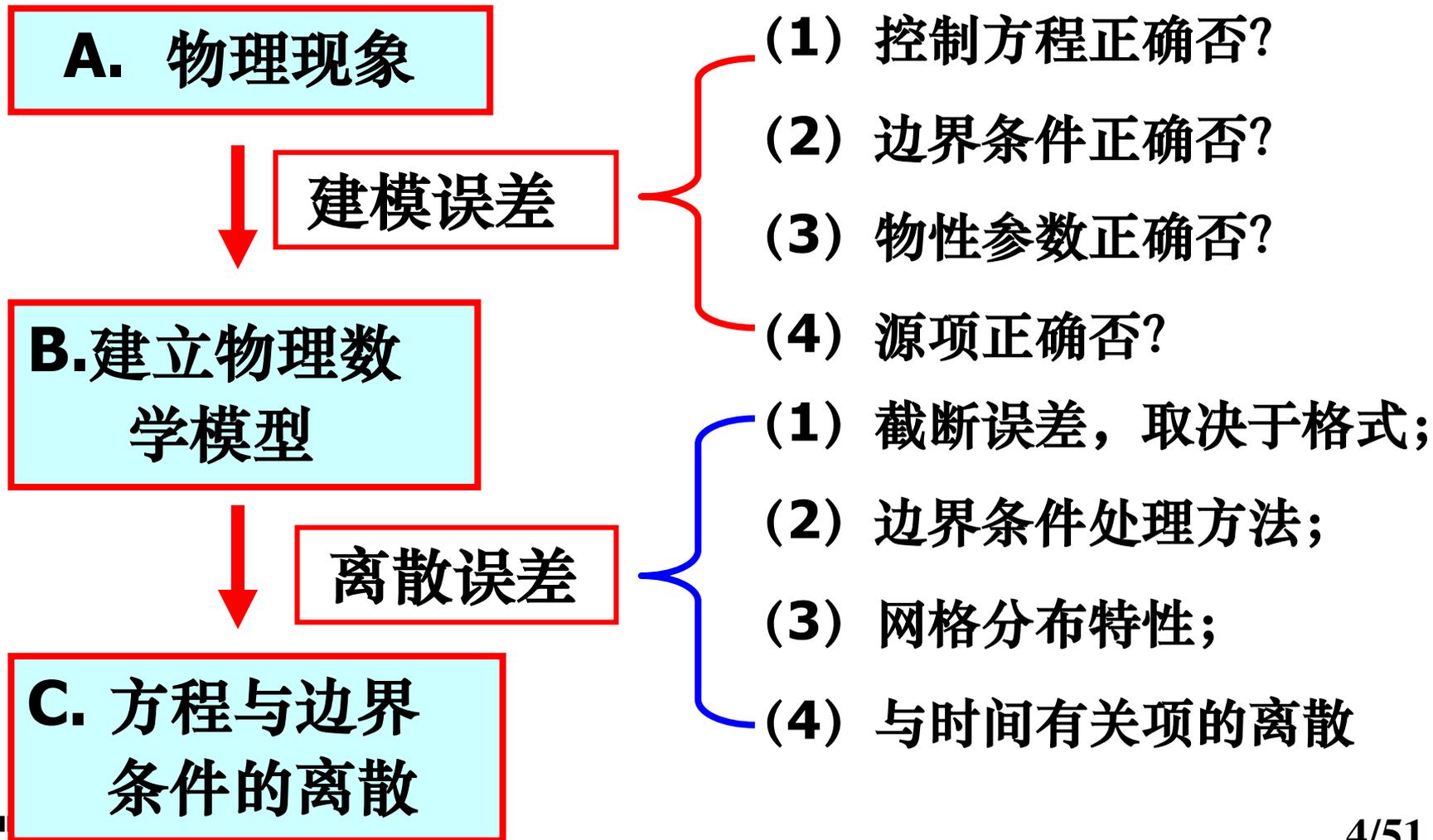
9.1.2 国际学术界对数值误差分析的要求

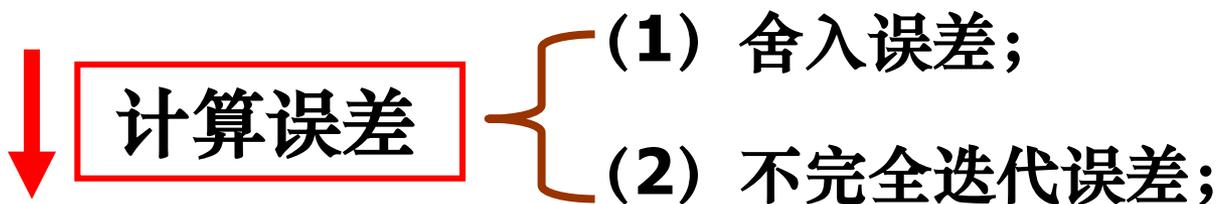
9.1.3 数值方法与结果的考核



9.1 数值解误差的分类及计算结果的考核

9.1.1 数值解误差的分类





D. 数值计算结果

离散误差是构成数值解误差的主要部分。

9.1.2 国际学术界对数值解误差分析的要求

1986年ASME J Fluids Engineering公布了对数值解的要求，**1993年**进一步确认，**2008年**又进一步强调；**1993年**归纳的十大政策主要为：

1. 必须说明离散格式的截断误差的阶数；
2. 空间导数的离散格式至少是二阶的；
3. 必须确认所提供的是网格无关解；
4. **FUD, HD, PLS, EPS**均被认为是一阶格式。

建议:调试程序时用FUD或者PLS, 正式计算用CD, SGSD, 或者3 阶对称格式。

9.1.3 数值方法与结果的考核

考核内容包括:

- (1) 数值解的网格独立性;
- (2) 与基准解的比较;
- (3) 离散格式精度等级分析;
- (4) 误差估计。

Validation and verification---V & V

有研究者认为:Validation是指计算模型正确与否的验证,而Verification是指数值方法处理合适与否的确认;但是实际上有时难以明确区别,因此近年来人们已不再予以区分而笼统称为V&V。

近年来ASME每年举行一次V & V 国际会议,2013年起在ASME期刊系里中创建了V&V子刊。

9.2 基准解

9.2.1 不同类型的分析解

9.2.2 高精度的数值解

9.2.3 可靠和完整的实验结果

9.2 基准解

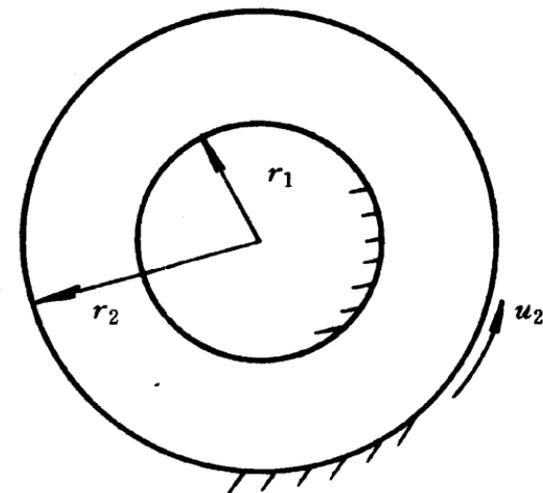
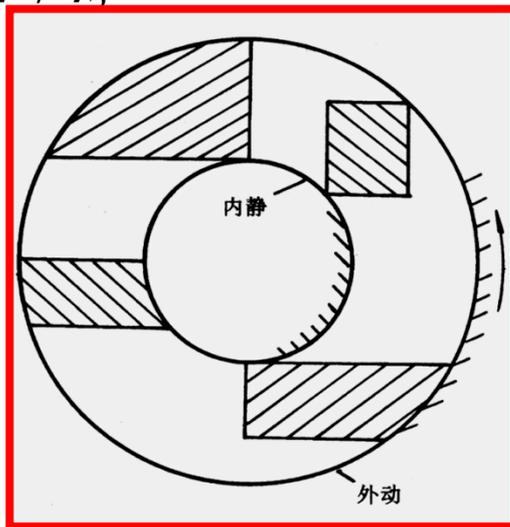
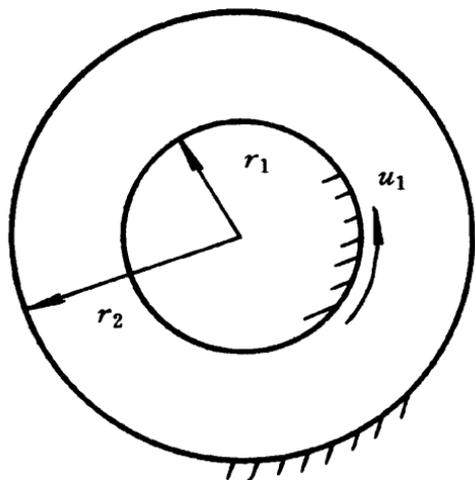
9.2.1 不同类型的分析解

1. 严格数学意义上的分析解

既满足微分方程又满足边界条件的数学表达式，数量极其有限。

$$\frac{u}{u_1} = \frac{r_1 / r_2}{1 - (r_1 / r_2)^2} \cdot \frac{1 - (r / r_2)^2}{r / r_2}$$

$$\frac{u}{u_2} = \frac{r_1 / r_2}{1 - (r_1 / r_2)^2} \cdot \left[\frac{r / r_2}{r_1 / r_2} - \frac{r_1 / r_2}{r / r_2} \right]$$



2. 只满足微分方程不满足边界条件的分析解

2D, 3D不可压缩NS方程的分析解:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{Re} \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\text{Re} \nabla p + \nabla^2 \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{array} \right.$$

**2D不可
压之解**

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\cos(\pi x) \sin(\pi y) e^{-2\pi^2 vt} \\ v = \cos(\pi y) \sin(\pi x) e^{-2\pi^2 vt} \\ p = -\frac{\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)}{4} e^{-4\pi^2 vt} \end{array} \right.$$

Ethier C R, Steimman D A. Exact fully 3D Navier-Stokes solution for benchmarking. Int J Numer Methods Fluids, 1994, 19(5): 369-376

3. 蔡睿贤院士的代数显式分析解（教材340页）；

4. 对于存在源项的对流扩散方程，任意选定的连续函数均可作为分析解：将该函数代入到该方程所产生的不等于零的部分记作为源项。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq L)$$

设

$$T = T_0 e^{t/t_0} \sin(\pi x / L) \quad (\text{a})$$

代入上式得

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left[\frac{1}{t_0} + a \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right] T_0 \sin(\pi x / L) e^{t/t_0}$$

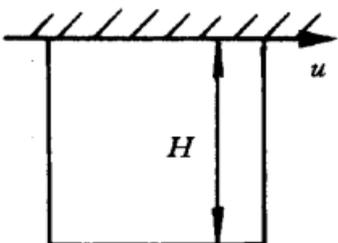
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = S \quad (0 \leq x \leq L) \\ S = \left[\frac{1}{t_0} + a \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right] T_0 \sin(\pi x / L) e^{t/t_0} \end{array} \right. \quad (\text{b})$$

故式(a) 是式(b)的分析解。

构筑此类分析解的意义： 可以构建计算区域的边界条件，用于考核数值计算的结果：对于规定的计算区域，以上述分析解计算该区域边界上的速度与压力，作为边界条件，让被考核的程序在此边界条件下计算域内的流场，将计算结果与分析解作比较。

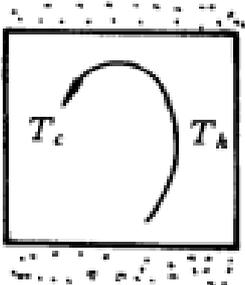
9.2.2 高精度的数值解

最著名的是1982年Ghia等的顶盖驱动流的计算结果。

No	物理问题及图示	参数范围	数值方法	文献
1	二维方腔顶盖驱动流 	$Re = uH/\nu$ $Re = 10^2 \sim 10^4$	涡量-流函数法 及多重网格方法, $Re = 10^4$ 时最密 网格为 257×257	[35]

U. Ghia, K.N. Ghia and C.T. Shin. High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. **J. Comput. Phys.**, 1982, 48:387-411.

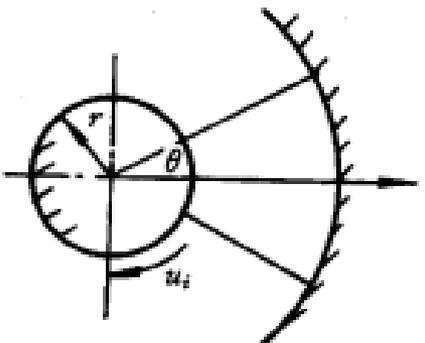
E. Ertuk, T.C. Corke and C. Gokcol. Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers, **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, 2005, .48:747-774

No	物理问题及图示	参数范围	数值方法	文献
2	二维方腔自然对流 	$Pr \approx 0.7$ $Ra = 10^3 \sim 10^{10}$	涡量-流函数法 ^[36] , 假拟谱方法 ^[36] , 128×128 ; 原始变量法, $k-\epsilon$ 模型, 壁面函数法 ^[38] , 80×80 ^[41] , 低 Re 的 $k-\epsilon$ 模型 ^[40]	[36]~[41]

De Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity, a benchmark numerical solution. **Int J Numerical Methods in Fluids** , 1983, 3:249-264

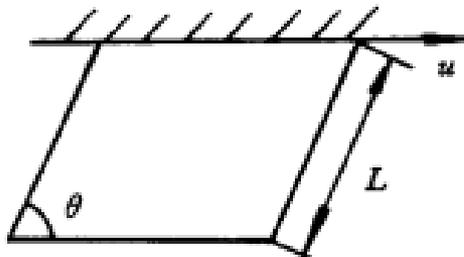
Barakos G, Mitsoulis E. Natural convection flow in a square cavity revisited, laminar and turbulent models with wall functions. **Int J Numerical Methods in Fluids** , 1994, 18:695-719

D.C. Wan, B.S.V. Patnaik and G.W. Wei. A New Benchmark Quality Solution for the Buoyancy-Driven Cavity by Discrete Singular Convolution. **Numer. Heat Transfer B**. 2001, Vol.40, pp.199-228

No	物理问题及图示	参数范围	数值方法	文献
3	二维环腔顶盖驱动流 	$Re = u_i r / \nu$ $Re = 60 \sim 350$ $2\theta = 1$ 弧度	涡量-流函数法, 多重网格 ^[42] , 128 × 128, 估计误差 0.1% ~ 1%; 原始变量法, 自适应网格 ^[43]	[42] [43]

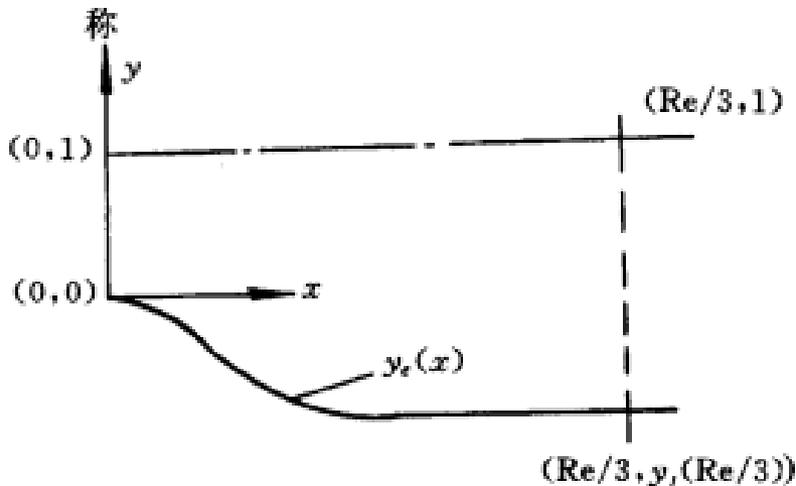
Fuchs L, Tillmark N. Numerical and experimental study of driven flow in a polar cavity. *Int J Numerical Methods in Fluids*, 1985, 5:311-329

Lee D, Tsuei Y M. A hybrid adaptive gridding procedure for recirculating flow problems. *J Comput Phys*. 1993, 108:122-141

No	物理问题及图示	参数范围	数值方法	文献
4	二维倾斜空腔顶盖驱动流 	$Re = \frac{uL}{\nu}$ $Re = 100, 1000$ $\beta = 30^\circ, 45^\circ$	适体坐标方法, 多重网格, 速度与 压力的耦合采用 对称的多重线迭 代法 $256 \times$ $256^{[44]}$, 适体坐 标, 同位网格 SIMPLE 方法 ^[45]	[44] [45]

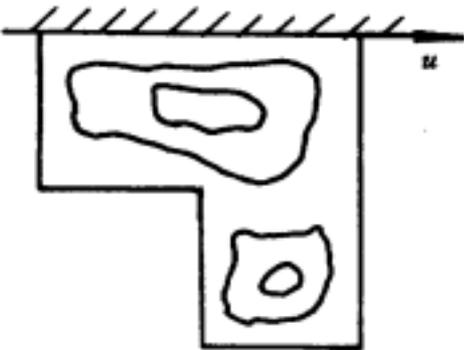
Demirdzic I, Lilek Z, Peric M. Fluid flow and heat transfer test problems for non-orthogonal grids ,benchmark solutions. **Int J Numerical Methods in Fluids** , 1992,15:339-354

Oosterlee CW ,Wesseling P, Segal A. Bechmark solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinate on staggered grids. **Int J Numerical Methods in Fluids** , 1993,17:301-321

No	物理问题及图示	参数范围	数值方法	文献
5	<p>二维对称渐扩通道中的层流流动</p> 	<p>$y_1 = [\tanh(2 - 30 \frac{x}{Re}) - \tanh(2)] / 2$ 入口流速分布 $u = 3(y - y^2/2)$ $v = 0, Re = 10, 100$</p>	<p>采用涡量-流函数方法或原始变量法, 21 × 21 网格</p>	<p>[46]</p>

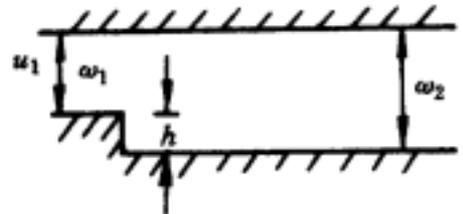
网格数目只有21X21，太少。

Napolitano M, Orlandi P. Laminar flow in a complex geometry – a comparison. **Int J Numerical Methods in Fluids**, 1985,5:667-683

No	物理问题及图示	参数范围	数值方法	文献
6	二维 L 型腔中的顶盖驱动流 	$Re=100, 1000$	适体坐标法(用双调和方程生成网格), 最密网格 256×256	[44]

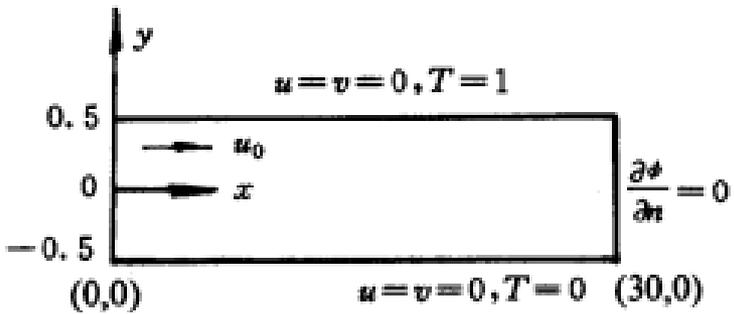
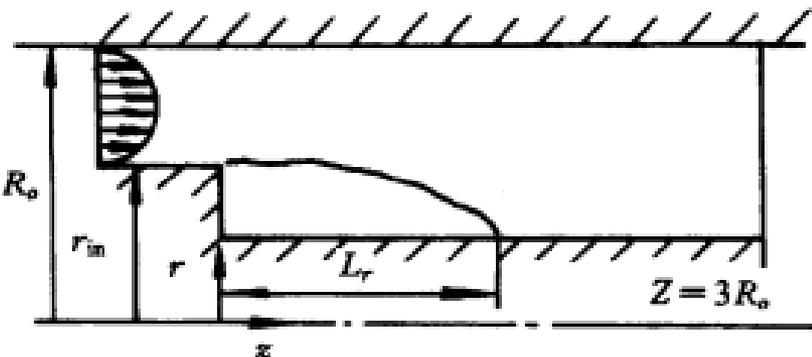
建议可用块结构化网格，原始变量法求解。

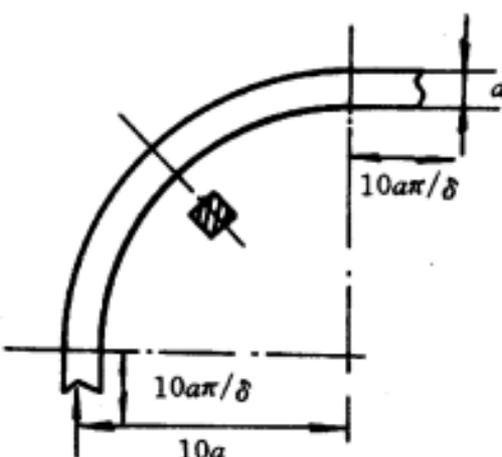
Oosterlee CW ,Wesseling P, Segal A. Benchmark solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in general coordinate on staggered grids. **Int J Numerical Methods in Fluids** , 1993,17:301-321

No	物理问题及图示	参数范围	数值方法	文献
7	后台阶流动与换热 	$Re = u_1 h / \nu = 10, 20, 50, 100, 200, 500$ $w_2 / w_1 = 1.25 \sim 2$ $Pr = 10^{-4} \sim 10^3$ [47] $Re = 800$ [48]	原始变量法, 压力用 Poisson 方程求解, 但该方程中保留膨胀项*, 60 × 40 网格 ^[47] . ψ - ω 方法, 有限元方法, $Re = 800$ 流动是稳定的 ^[48]	[47] [48] [49]

对于此类突扩流动，当Re数大于一定数值后，流动会出现分叉，表现为重接触点位置周期性的变化。

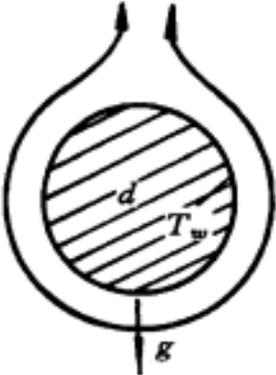
Gresho P M. Is the steady viscous incompressible two-dimensional flow over a backward-facing at $Re=800$ stable? **Int J Numerical Methods in Fluids**, 1993,17:501-541

No	物理问题及图示	参数范围	数值方法	文献
8	<p>后台阶分层流动(stratified flow)</p> 	<p>$Pr=1,$ $Re=u_0H/\nu=800$ $Gr=3.6\times 10^5$ H 为通道高度</p>	<p>有限元法,原始变量法,从非稳态计算到稳态,采用 80×480 长方形单元,共 38961 个节点</p>	<p>[50]</p>
9	<p>环状后台阶流</p> 	<p>$r_{in}=0.6R_0$ $Re=\frac{UR_0}{\nu}=100\sim 400$ U 为入口最大速度</p>	<p>$\phi-\omega$ 方法,四阶配位法 (collocation method)</p>	<p>[51]</p>

No	物理问题及图示	参数范围	数值方法	文献
10	方形截面管道 90°弯头的三维层流流动 	$Re = \frac{\rho u_m a}{\nu} = 0, 100, 500$ $De = Re / \sqrt{10}$ 式中 De 为 Dean 数 (Dean number) u_m 为截面平均流速	有限元法 32 (90°弯头区) × 16 × 16(截面)	[52]

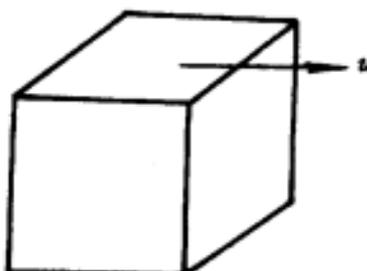
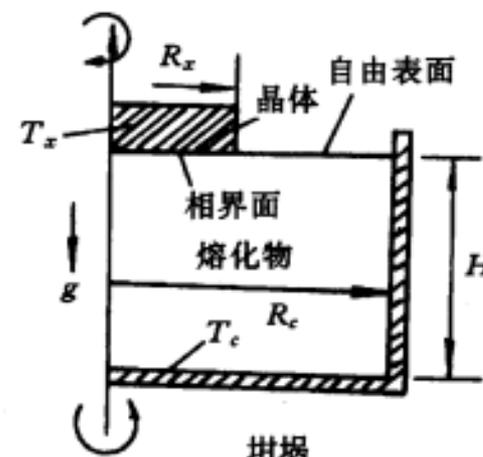
Hassager O, Henrikson P, Townsend P, Webster M F, Ding D. The quarterbend: a three-dimensional benchmark problem. **Compt Fluids**, 1991, 20:373-386



No	物理问题及图示	参数范围	数值方法	文献
11	水平圆管外的层流自然对流 	$Pr=0.7$ $Ra=10^3 \sim 10^5$	计算区域外边界取到 $2000 \sim 20000d$, 平均 Nu 准确到三位数字	[53]

Saitoh T, Sajiki T, Maruhara K. Benchmark solution to natural convection heat transfer problem around a horizontal circular cylinder. **Int J Heat Mass Transfer**, 1993, 36:1251-1259



<p>12</p>	<p>三维顶盖驱动流</p> 	<p>$Re = 1000, 2000, 3200$ $Re = 1000$ 的解各人的结果符合得很好, $Re = 2000$ 无基准解, $Re = 3000$ 无稳态解</p>	<p>原始变量法, 最小二乘方有限元法, $60 \times 61 \times 30$ 平元</p>	<p>[54]</p>
<p>13</p>	<p>Czochralski 晶体成长简化模型的流动</p> 	<p>$Pr = 0.05$ $H/R_c = 1.0$ $R_x/R_c = 0.4$ $Re_x = R_x^2 \Omega_x / \nu = 0 \sim 10^4$ $Re_c = R_c^2 \Omega_c / \nu = 0 \sim 2.5 \times 10^{-3}$ $Gr = g\beta(T_c - T_x)R_c^3 / \nu^2 = 0 \sim 10^6$</p>	<p>有限容积法, 对流项用 CD 及延迟修正, SIMPLE 算法, SIP 方法求解代数方程, 多重网格法, 从 10×10 到 320×320</p>	<p>[55]</p>

9.2.3 可靠而且完全的实验结果

9.3 离散格式截断误差的分析

9.3.1 有限差分法—Taylor展开

9.3.2 有限容积法—Leonard 方式的Taylor展开

9.3.3 有限容积法—Jin方式的Taylor展开

9.3 离散格式阶段误差的分析

9.3.1 有限差分法—Taylor展开

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{model} + (TE)_{FD}$$

$(TE)_{FD}$ 很容易由**Taylor**展开获得。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{model} = \begin{cases} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} & (TE)_{FD} = O(\Delta x) \\ \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} & (TE)_{FD} = O(\Delta x) \\ \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} & (TE)_{FD} = O(\Delta x^2) \end{cases}$$

9.3.2 有限容积法—Leonard方式的Taylor展开

将一阶导数的离散表达式看成是一阶导数在该单元中的平均值：

$$\frac{1}{h} \int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \frac{\phi_e - \phi_w}{h} = \frac{(\phi_e - \phi_w)_{model}}{h} + (TE)_{FV}$$

此式无任何误差

误差从界面值的模型引入

Leonard方式的分析截断误差的方法如下：

Leonard BP. Order of accuracy of QUICK and related convection diffusion schemes. Appl. Math. Modelling, 1995, 19:640-653

对CD:

$$\frac{\phi_e - \phi_w}{h} = \left[\frac{\left(\frac{\phi_{i+1} + \phi_i}{2} - \frac{\phi_i + \phi_{i-1}}{2} \right)}{h} \right] + (TE)_{FV}$$

这是中心差分的
界面插值模型

Leonard方式的分析：将 ϕ_{i+1}, ϕ_i 对 e 界面作展开，将 ϕ_i, ϕ_{i-1} 对 w 界面作展开，最后得出

$$(TE)_{CD,L} = -\frac{1}{8} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i h^2 - \frac{1}{128} \left(\frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5} \right)_i h^4 + \dots$$

FD方式的分析得:

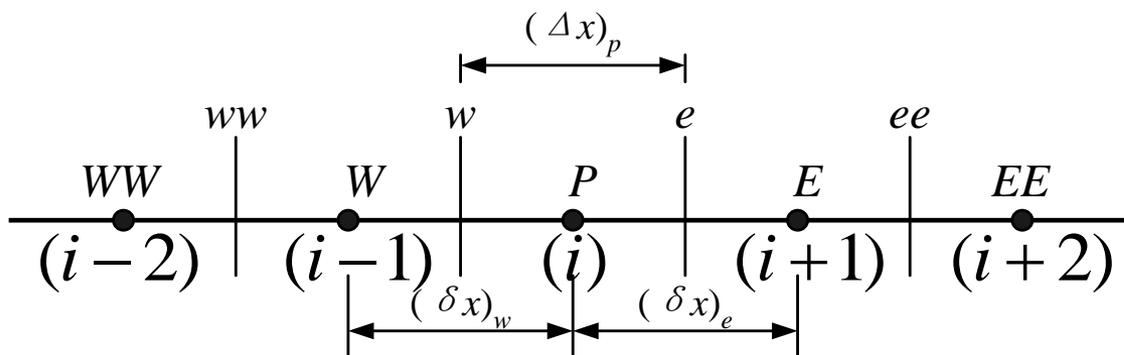
$$(TE)_{CD} = -\frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i h^2 - \frac{1}{120} \left(\frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5} \right)_i h^4 + \dots$$

按Leonard方式的分析得出QUICK为 3 阶格式。

9.3.3 有限容积法—Jin方式的Taylor展开

$$\begin{cases} \phi_e = a_{i-1}\phi_{i-1} + a_i\phi_i + a_{i+1}\phi_{i+1} \\ \phi_w = a_{i-1}\phi_{i-2} + a_i\phi_{i-1} + a_{i+1}\phi_i \end{cases} \quad (1)$$

在 e 和 w 界面上的插值采用相同的一套系数。



在 FVM 中对流项在控制容积上的积分导致：

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_e - \phi_w}{\Delta x} \quad (2)$$

将式 (1) 的表达式代入：

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_e - \phi_w}{\Delta x} = \frac{(a_i - a_{i+1})\phi_i + (a_{i-1} - a_i)\phi_{i-1} + a_{i+1}\phi_{i+1} - a_{i-1}\phi_{i-2}}{\Delta x} \quad (3)$$

将 $\phi_{i-2}, \phi_{i-1}, \phi_{i+1}$ 对 i 点做 Taylor 级数展开

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i &= \underbrace{(a_i + a_{i-1} + a_{i+1})}_{\text{分析解}} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + \underbrace{(-3a_{i-1} - a_i + a_{i+1})}_{\text{离散变量的一阶导数, 近似解}} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i \cdot \frac{\Delta x}{2!} \\ &\quad + \underbrace{(7a_{i-1} + a_i + a_{i+1})}_{\text{离散变量的一阶导数, 近似解}} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right|_i \cdot \frac{\Delta x^2}{3!} + O(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (4)$$

分析解

离散变量的一阶导数，近似解

不计三阶及更高阶截差:

$$\begin{cases} a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = 1 \\ -3a_{i-1} - a_i + a_{i+1} = 0 \\ 7a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = 0 \end{cases} \longrightarrow a_i = \frac{5}{6}, a_{i-1} = -\frac{1}{6}, a_{i+1} = \frac{1}{3}$$

即得三阶迎风 (TUD) 格式:

$$\begin{cases} \phi_e = -\frac{1}{6} \phi_{i-1} + \frac{5}{6} \phi_i + \frac{1}{3} \phi_{i+1} \\ \phi_w = -\frac{1}{6} \phi_{i-2} + \frac{5}{6} \phi_{i-1} + \frac{1}{3} \phi_i \end{cases} \quad (5)$$

如果在式 (4) 中保留三阶导数项 (即二阶阶段误差项), 得:

$$\begin{cases} a_{i-1} + a_i + a_{i+1} = 1 \\ -3a_{i-1} - a_i + a_{i+1} = 0 \\ 7a_{i-1} + a_i + a_{i+1} \neq 0 \end{cases} \rightarrow a_i \neq \frac{5}{6}, a_{i-1} = \frac{1}{4} - \frac{a_i}{2}, a_{i+1} = \frac{3}{4} - \frac{a_i}{2}$$

由此获得FVM中具有二阶截差格式的一般表达式:

$$\begin{cases} \phi_e = a_i \phi_i + \left(\frac{1}{4} - \frac{a_i}{2} \right) \phi_{i-1} + \left(\frac{3}{4} - \frac{a_i}{2} \right) \phi_{i+1} \\ \phi_w = a_i \phi_{i-1} + \left(\frac{1}{4} - \frac{a_i}{2} \right) \phi_{i-2} + \left(\frac{3}{4} - \frac{a_i}{2} \right) \phi_i \\ a_i \neq \frac{5}{6} \end{cases} \quad (6)$$

$$a_i = 3/4 \quad \phi_e = \frac{3}{8} \phi_{i+1} + \frac{6}{8} \phi_i - \frac{1}{8} \phi_{i-1} \quad (\text{QUICK})$$

9.4 Richardson外推法

9.4.1 Richardson外推法基本假设

9.4.2 Richardson外推法的实施

9.4.3 实施Richardson外推法的几点说明

9.4 Richardson 外推法

9.4.1 Richardson外推法的基本假设

1. 数值解单调地收敛；
2. 网格已经足够细密，截断误差中只计首项，更高阶的项可以不计；
3. 舍入误差与不完全迭代误差可以略而不及计。

9.4.2 Richardson外推法的实施

利用三套不同疏密网格上的解，可以推得其精确解的估计值。假设被求变量可以表示为：

$$\phi = \phi_{\alpha h} + C(\alpha h)^n$$

其中： α 网格调节参数； C, n 取决于所用格式， n 为截断误差的阶数。此式中有三个待定 C, n, ϕ 。

如果 $\alpha = 1, 2, 4$ ，即有三套成倍变化的网格上的数值解，则可得出：

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \phi_h + C(h)^n \\ \phi = \phi_{2h} + C(2h)^n \\ \phi = \phi_{4h} + C(4h)^n \end{array} \right.$$

由此解得：

收敛解的估计值：

$$\phi = \frac{2^n \phi_h - \phi_{2h}}{2^n - 1}$$

截断误差阶数：

$$n = \frac{\ln[(\phi_{2h} - \phi_{4h}) / (\phi_h - \phi_{2h})]}{\ln 2}$$

系数：

$$C = \frac{\phi - \phi_h}{h^2}$$

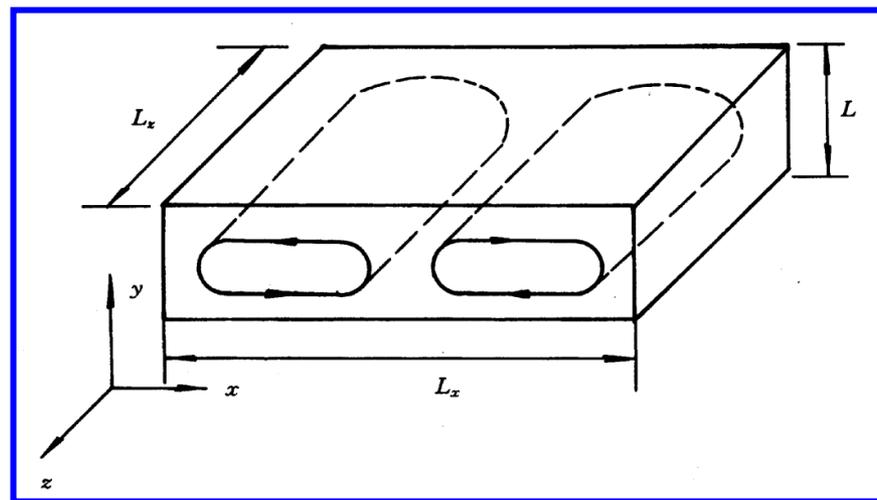
步长为 h 的网格上数值解的离散误差：

$$\varepsilon_h = \phi - \phi_h = \frac{\phi_h - \phi_{2h}}{2^n - 1}$$

9.4.3 实施Richardson外推法的几点说明

1. Richardson外推法中被估计的量既可以是场变量，例如速度，温度等，也可以是与整场有关的经过处理的量，例如Nu, f , **这正是该法最引人之处。**

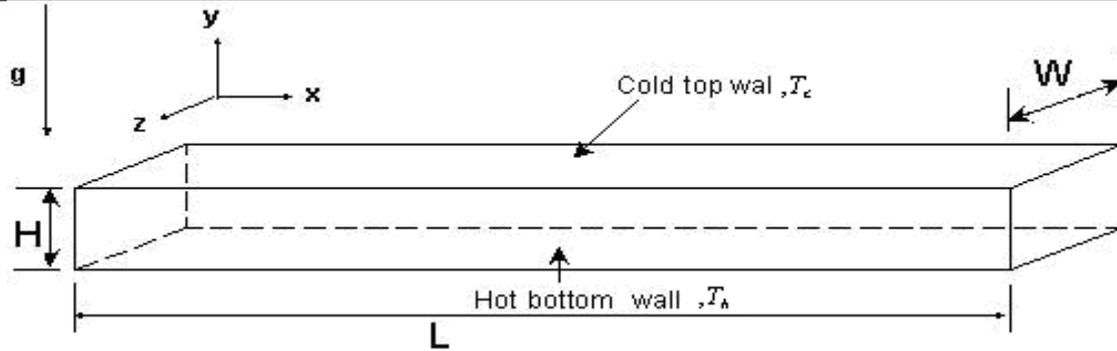
例如K T Yang (杨光祖) 等就用此法估计Benard流动的Nu值:



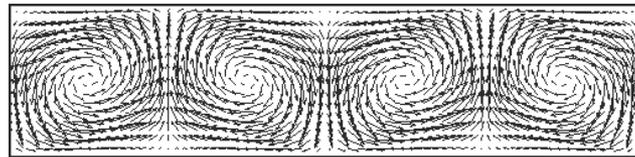
Mukutmoni D, Yang K T. Rayleigh-Benard convection in a small aspect ratio enclosure, Part 1. ASME J Heat Transfer, 1993, 115: 360-366

表 7-9 双涡 Rayleigh-Bernad 流动计算结果的外推

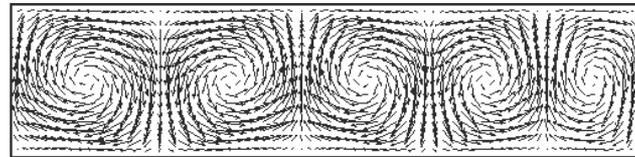
网格	20×20×20	40×40×40	80×80×80	Richardson 外推法	相对偏差(%)
Nu	2.646	2.586	2.571	2.566	3.12
U_{\max}	42.75	42.97	43.01	43.02	0.63
$x_{\max} (U_{\max})$	0.70	0.61	0.66	0.677	
$y_{\max} (U_{\max})$	0.82	0.81	0.81	0.18	
$z_{\max} (U_{\max})$	0.47	0.50	0.51	0.513	
V_{\max}	46.67	51.05	51.95	52.25	10.38
$x_{\max} (V_{\max})$	0.09	0.04	0.02	0.0133	
$y_{\max} (V_{\max})$	0.55	0.32	0.52	0.52	
$z_{\max} (V_{\max})$	1.0	1.02	1.04	1.048	
W_{\max}	7.81	8.13	8.18	8.200	4.72
$x_{\max} (W_{\max})$	0.09	0.04	0.02	0.0133	
$y_{\max} (W_{\max})$	0.22	0.21	0.21	0.21	
$z_{\max} (W_{\max})$	0.315	0.315	0.315	0.315	



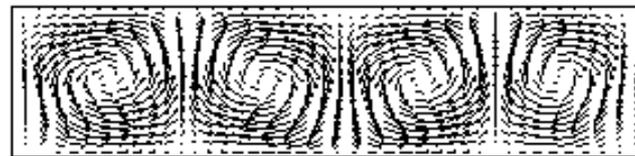
(a)



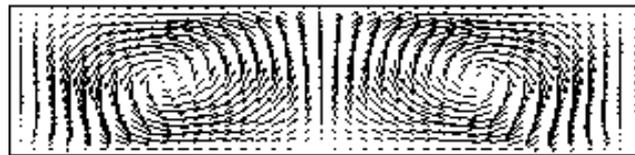
(b)



(c)



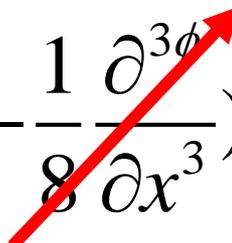
(d)



(e)

2. 用Richardson外推法外推场中某点之值时，三套网格上的值应在同一地点，如果需要可以插值，但插值公式的阶数应高于离散格式阶数；

3. 用Richardson外推法外得到的估计值实际上是更高阶截断误差下的解；例如中心差分：外推结果是四阶截差下的结果：

$$(TE)_{FV} = -\frac{1}{8} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_i h^2 - \frac{1}{128} \frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5} \Big|_i h^4$$


4. 尽管Richardson外推法有其局限性，但仍然是目前最可靠的获得数值解不确定度的方法。

9.5 网格收敛性指标及迭代不完全误差

9.5.1 网格收敛性指标问题

9.5.2 数值解相对误差的估计计算式

9.5.3 Roache 的网格收敛性指标GCI

9.5.4 不完全迭代误差的估计

9.5.5 Xing与Stern的安全因子方法

9.5 网格收敛性指标及迭代不完全误差

9.5.1 网格收敛性指标问题

实际计算中通过逐渐加密网格来获得网格无关的解。采用不同截断误差的离散格式时，在两套疏密不同网格上得到的解的评价需要有一个统一的方式。如：

方案1：一阶截差格式，网格加密**50%**，两个解的偏**4%**：

方案2：二阶截差格式，网格加密**100%**，两个解的偏**6%**。

问：哪一个密网格的解更可靠（精确）？

9.5.2 数值解相对误差的估计计算式

利用Richardson外推法的基本思想来分析。

设计算中所用离散格式为 p 阶，网格步长为 h ，数值解为 ϕ_1 ，分析解为 ϕ_0 ，则可假设：

$$\phi_1 = \phi_0 + \underline{g_1 h^p} + g_2 h^{p+1} + g_3 h^{p+2} + \dots (1)$$

将网格扩大或缩小 α 倍后，有

$$\phi_2 = \phi_0 + \underline{g_1 (\alpha h)^p} + g_2 (\alpha h)^{p+1} + g_3 (\alpha h)^{p+2} + \dots (2)$$

将 α^p 乘式(1)，再减去式(2)

$$\alpha^p \phi_1 = \alpha^p (\phi_0 + g_1 h^p + g_2 h^{p+1} + g_3 h^{p+2} + \dots) \quad (1)$$

$$\phi_2 = \phi_0 + g_1 (\alpha h)^p + g_2 (\alpha h)^{p+1} + g_3 (\alpha h)^{p+2} + \dots \quad (2)$$

由此解出 ϕ_0

$$\phi_0 = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{\alpha^p - 1} + O(h^{p+1})$$

假设网格已经足够细密，则余项可以略去，得

$$\phi_1 - \phi_0 = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\alpha^p - 1}$$

定义数值解相对误差的估计值为：
$$E_1 = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\phi_1}$$

将前式代入上式，得：

$$E_1 = \frac{1}{\phi_1} (\phi_1 - \phi_0) = \frac{1}{\phi_1} \frac{\phi_2 - \phi_1}{\alpha^p - 1} \quad (3)$$

$$E_1 = \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_1} \right) \frac{1}{\alpha^p - 1} = \frac{\varepsilon}{\alpha^p - 1}$$

ε 为疏密两套网格间的相对偏差，
$$\varepsilon = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_1}$$

可见：应该用 E_1 作为数值解相对偏差的估计值，而

采用 ε 是不够合理的，因为它既未考虑截差阶数也未考虑两套网格之比。实际上要使两套网格上的解的相对偏差小于某个小数是十分容易的。

9.5.3 Roache 的网格收敛性指标GCI

GCI---Grid
convergence
index

$$GCI_{fine} = 3|\varepsilon| / (\alpha^p - 1) \quad (4)$$

当 $\alpha = 2, p = 2$ 时 $GCI_{fine} = |\varepsilon|$

因此上述网格收敛性指标可以看成为：由任意 p 阶， α 倍变化的两套网格所得之解而确定的 ε 折算到同一问题采用二阶截差，两倍网格变化的两套解的相对变化值。

用上述网格收敛性指标来分析本节开始提出的问题：

$$GCI_{fine} = 3|\varepsilon| / (\alpha^p - 1)$$

方案1: $p=1$, $\alpha = 1.5$, $GCI=3 \times 4 / (1.5-1)=24\%$

方案2: $p=2$, $\alpha = 2$, $GCI=3 \times 6 / (2^2 - 1) = 6\%$

方案2的密网格的解要更好一些。

往往经过网格考核后，出于经济性考虑采用了疏网格上的解作为数值解，则网格收敛性指标为：

$$GCI_{coarse} = GCI_{fine} \cdot \alpha^p \quad (5)$$

Roache P J. Prospective: A method for uniform reporting of grid refinement studies. ASME J Fluids Engineering, 1994, 116: 405-413

9.5.4 不完全迭代误差的估计

假设在迭代过程快收敛时，下列矩阵方程中：

$$\phi^{n+1} = \mathbf{H}\phi^n + \mathbf{D} \quad (6)$$

矩阵 \mathbf{H}, \mathbf{D} 已经近似地为常数（线性化假设）。

收敛解与第 n 次迭代解之间有如下关系：

$$\phi^n = \phi_0 + \varepsilon^n \quad (7)$$

代入式 (6) 得：

$$\underline{\phi_0} + \varepsilon^{n+1} = \underline{\mathbf{H}}(\phi_0 + \varepsilon^n) + \underline{\mathbf{D}}$$

$$\varepsilon^{n+1} = \mathbf{H}\varepsilon^n$$

迭代快收敛时误差矢量是以迭代矩阵H的方式而传递的。

由矩阵理论，第n次迭代的不完全误差：

$$\varepsilon^n = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\lambda_1 - 1} \quad \lambda_1 \text{ 为矩阵的谱半径。} \quad (8)$$

可见：仅以两次迭代的偏差作为收敛依据是不科学的，理论上应以式（8）为判据，但是谱半径的计算费时，一般用余量的范数较为方便与合理；而且每个所求解方程的规整化余量至少下降3-4个数量级。只有迭代不完全误差可以不计的情况，做数值解的离散误差分析才有意义。

9.5.5 Xing与Stern的安全因子方法

上述讨论（Recharadson外推法，GCI收敛性指标）都基于下列假设：

- (1) 收敛是渐进的，不存在震荡；
- (2) 数值误差的分析公式中仅保留了级数的第1项：

$$\phi = \phi_{\alpha h} + C(\alpha h)^n$$

如果要保留第2项就会导致很大的计算工作量；

- (3) 所用到的数值解已经足够接近于真解；外推需要3套这样的解。

Xing Tao (邢涛) 与 Stern F最近提出了称为安全因子 (Factor of safety)的评价方法, 可部分地克服这些缺点。

Xing T, Stern F. Factors of safety for Recharadson extrapolation . ASME J Fluids Engineering, 2010, 132, 061403-1 — 061403-13

ASME J Fluids Engineerig 在2008年提出的分析不确定度的方法可见:

Celik I B, Ghia U, R Roache P J, Freitas C J, Coleman H, Raad P E., Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in CFD applications. ASME J Fluids Engineering, 2008, 130:078001-1 to 078001-4



同舟共济 渡彼岸!

People in the same
boat help each
other to cross to
the other bank,
where....

Thanks for your attention!