

# 计算传热学的近代进展

## 第四章 捕捉界面的VOSET方法



**主讲 陶文铨**

西安交通大学能源与动力工程学院  
热流科学与工程教育部重点实验室  
2021年3月15日, 西安

## 第四章 捕捉界面的VOSET方法

### 4.1 VOF与Level Set方法简介

### 4.2 捕捉界面的VOSET方法

### 4.3 VOSET方法求解有相变的气液两相流问题

### 4.4 VOSET向三维的推广

## 4.1 VOF与Level Set方法简介

### 4.1.1 引言

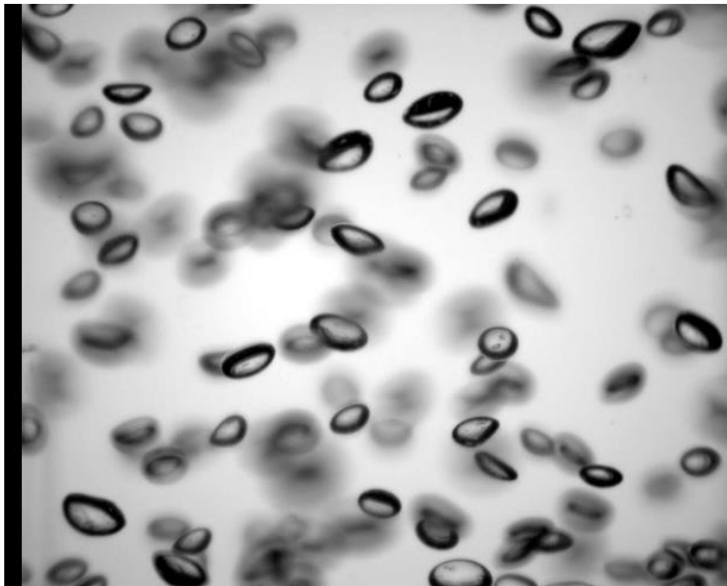
### 4.1.2 VOF方法简介

### 4.1.3 Level Set 方法简介

## 4.1 VOF 与 LEVEL SET 方法简介

### 4.1.1 引言

两相流是一类非常普遍的自然现象，广泛引用于多个工程领域。例如：液滴/气泡流动，凝结，沸腾，晶体生长。**两相流中的运动界面的存在对直接数值模拟提出了新的要求。**



## 气液两相流数值模拟方法的分类

气液两相流的模拟由于存在两相而使数值方法的复杂性大大增加，至今连如何分类也还没有统一的意见；在连续介质的范围内就气液两相流的数值模拟而言，可以大别为以下两大类：

- 1. 精细捕捉相界面的方法：**随着流体的运动相界面的位置移动能够精细地予以描述，如VOF；
- 2. 非精细捕捉相界面的方法：**求解流场及容积含气率等相分布的变化，如均相模型，双流体模型等；即使分辨不同的相，也只是假定分散相是均匀的颗粒，并不精细刻画其界面的变化，如颗粒轨道模型，等。

## 目前常用的几种的相界面捕捉方法：

**(1) Volume of fluid (VOF)，流体体积方法**

**(2) Level Set (LS)，水平集方法**

**(3) Front tracking，前沿跟踪方法**

Unverdi S.O., Tryggvason G. , A front tracking method for viscous incompressible multi-fluid flow. *J. Comput. Physics*, 1992, 100:25-34

**(4) Phase-field，相场法**

Jacqmin D., A Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling. *J. Comput. Physics*, 1999, 155:96-127

**(5) VOSET，流体体积和水平集耦合方法**

## 4.1.2 VOF方法简介

1981年由 Hirt 和 Nichols 提出。

### 1. 流体体积函数

#### 1) 定义

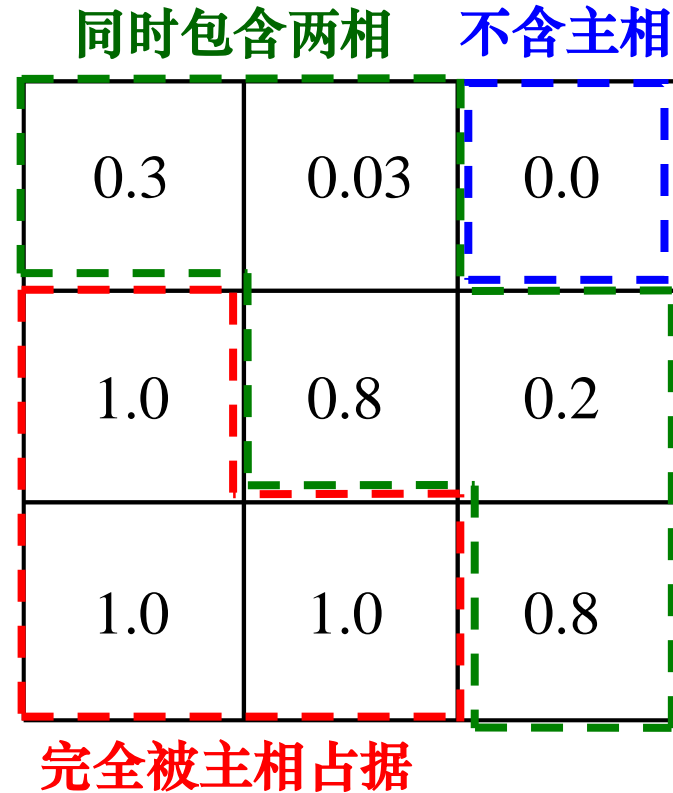
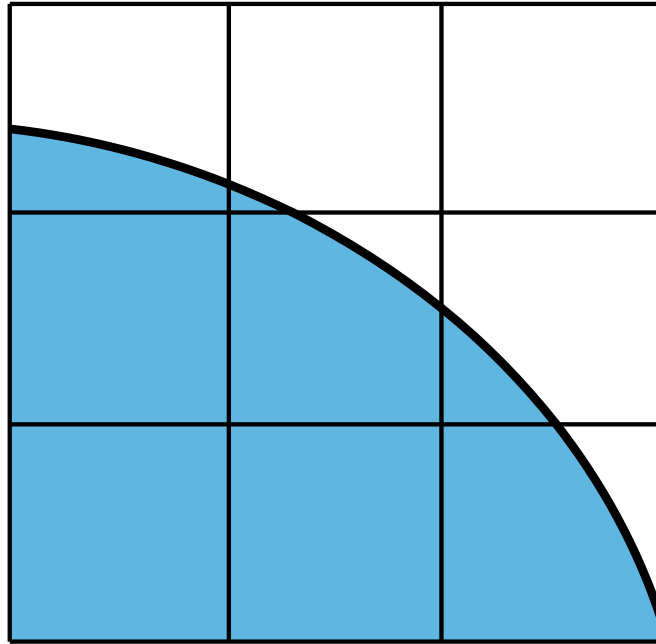
VOF方法用**流体体积函数 (volume function)  $C$**  来标识两相的分布。一个计算网格的流体体积函数指**主相(reference phase)**流体在整个网格中所占的体积比例。

根据流体体积函数的定义：

$C = 0$  表示网格不含主相；  $C = 1$  表示网格完全被主相占据；

$0 < C < 1$  表示网格同时包含两相。

Hirt C.W., Nichols B.D., Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundary, J. Comput. Physics, 1981,39:201-225



## 2) C 函数的特点:

- (1) 有界性; ( $0 \leq C \leq 1$ ) ;
- (2) 在相界面上阶跃性变化。



### 3) 用流体体积函数计算界面方向和曲率

由于流体体积函数的阶跃性，使得计算界面曲率和方向都不准确；因此一般不直接用其计算界面的法方向和曲率，而是采用**光顺化的流体体积函数**  $\tilde{C}$

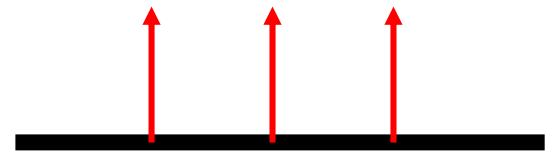
界面法线  
方向

$$\vec{n} = \nabla \tilde{C}$$

界面曲率

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \tilde{C}}{|\nabla \tilde{C}|}$$

曲线的曲率是单位法线的散度：



对平面，法线方向不变，

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = 0 \quad \text{曲率为零} \quad \kappa = 0$$

光顺化的流体体积函数可以通过对流体体积函数进行**局部平均和光滑**求得。例如：

$$\tilde{C}_{i,j} = \sum_{m,n} C_{m,n} K \left( \left| \vec{r}_{i,j} - \vec{r}_{m,n} \right|, \varepsilon \right)$$

这里的  $K$  为光顺化函数，例如可以使用B样条函数：

$$K(r, \varepsilon) = \begin{cases} (40/7\pi) \left( 1 - 6(r/\varepsilon)^2 + 6(r/\varepsilon)^3 \right) & (r/\varepsilon < 1/2) \\ (80/7\pi) (1 - r/\varepsilon) & (1/2 \leq r/\varepsilon < 1) \\ 0 & (r/\varepsilon > 1) \end{cases}$$

$\varepsilon$  控制光顺化的厚度，一般选择三个网格宽度： $\varepsilon = 3\Delta$

$C_{m,n}$  位在光顺化厚度范围内的控制容积的体积函数；

$$r = \left| \vec{r}_{i,j} - \vec{r}_{m,n} \right|$$

## 2. 流体体积函数的推进（演化）方程

### 1) 方程的导出

界面扑捉是非稳态过程，求解的基本思想是首先确定流场，其时通过物性参数来反映两相流，但不细化的界面；确定流场后在一个给定的流场下，再推进主相的分布。

假设：

(1) 两相互不相溶； **无扩散项**

(2) 没有相变、化学反应等过程消耗/生成主相； **无源项**

流体体积函数的控制方程只剩下**瞬态项**和**对流项**：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C = 0$$

一个网格的流体体积函数只因主相的流入/流出而变化。

将VOF方程的对流项变成守恒型：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C + \cancel{C \cdot \nabla \vec{u}} = 0$$

即：

散度形式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} C) = 0$$

对控制容积 $\Delta V$ ，时间步长 $\Delta t$ 做积分：

$$(C^{t+\Delta t} - C^t) \Delta V + \int_t^{t+\Delta t} \oint_{\Delta A} (\vec{u} C) \cdot d\vec{A} dt = 0$$

主相体积变化

净流出体积

可以看出，VOF方法定义的主相通过网格界面在不同的网格中转移，这决定了VOF方法能保持**总体的质量守恒**。

## 2) 方程的求解

VOF方程显然可以采用**有界高阶组合格式按照纯对流问题来求解**。

但是，任何格式都无法避免假扩散，这使得流体体积函数在推进的过程中阶跃性被逐渐抹平，**相界面逐渐变厚**。

为了解决这个问题，需要对格式进行修正以控制界面的厚度。例如，有人用修正的MUSCL格式求解VOF方程。

S. Y. Lin, Y.H. Chin, C.M. Wu, J.F. Lin, Y.C. Chen, A pressure correction-volume of fluid method for simulation of two-phase flows, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2012, 68, 181-195.

另一种更普遍的方法是采用**几何重构与推进方法求解VOF方程**，这样可以使流体体积函数的阶跃性能够自动保持。

## 3.几何重构与推进方法

就是研究对于给定时刻的  $C$  分布如何随着流动而变化到下一时刻的分布。

用几何方法求解 VOF 方程包含两个步骤。

### 1) 求解步骤

#### (1) 界面重构 (**Reconstruction**);

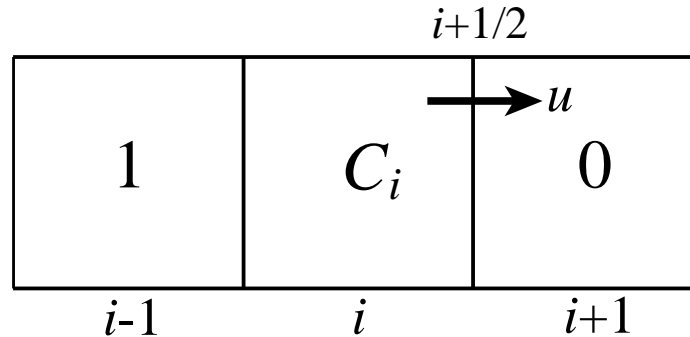
满足  $0 < C < 1$  的网格同时包含两相，自然也就包含相界面。VOF相界面的重构，就是在一定的假定下，确定这一类网格内部相界面的位置。

#### (2) 界面推进 (**Advection**); **注意这是纯对流!**

根据重构得到的相界面位置，计算  $\Delta t$  内主相流体在网格之间的交换，得到下一个时层的流体体积函数。

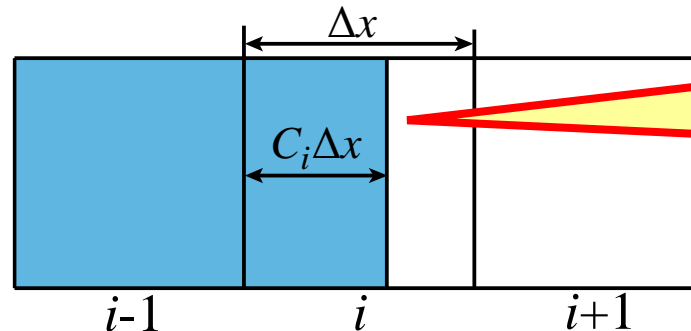
## 2) 举例

以一个一维度问题说明这两个步骤。



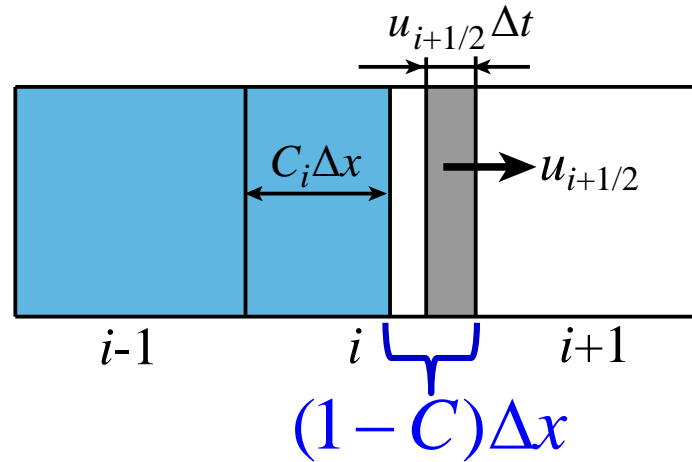
### (1) 界面重构

只有网格  $i$  需要重构界面；在网格  $i$  上，设主相流体位于左侧，界面与左边界的距离由流体体积函数计算。



一个时间间隔后需要重构的相界面

## (2) 界面推进



从网格  $i-1$  流入网格  $i$  的主相流体体积:

$$F_{i-1/2} = u_{i-1/2} \Delta t$$

从网格  $i$  流入网格  $i+1$  的主相流体体积:

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} 0 & u_{i+1/2} \Delta t < (1-C)\Delta x \\ u_{i+1/2} \Delta t - (1-C)\Delta x & u_{i+1/2} \Delta t > (1-C)\Delta x \end{cases}$$

计算下一时层网格  $i$  的流体体积函数:

$$C_i^{t+\Delta t} = C_i^t + (F_{i-1/2} - F_{i+1/2}) / \Delta x$$



### 3) 对时间步长的要求

$$C_i^{t+\Delta t} = C_i^t + (F_{i-1/2} - F_{i+1/2}) / \Delta x$$

所以从C的有界性:  $(F_{i-1/2} - F_{i+1/2}) / \Delta x$  最大值必小于等于1,

$$(F_{i-1/2} - F_{i+1/2}) / \Delta x = (u_{i-1/2} \Delta t - u_{i+1/2} \Delta t) / \Delta x$$

此式当一个界面流速为0时也许满足, 也就是:  $\frac{u_{\max} \Delta t}{\Delta x} \leq 1$

即要求一个时间步长推进的距离不能超过一个网格的长度, 也就需要限制时间步长。

这就是限制时间步长的 **CFL(Courant, Friedrichs, and Lewy)**条件; 设定的时间步长为:

$$\Delta t = C_{FL} \frac{\Delta x}{u_{\max}}$$

这里的  $C_{FL}$  就是 **CFL数**, 有时也称为 **Courant数**。

实际计算中通常选择  $C_{FL} = 0.1$  或者更小。

## 4) 二维相界面的重构

(1) 确定界面法线方向；

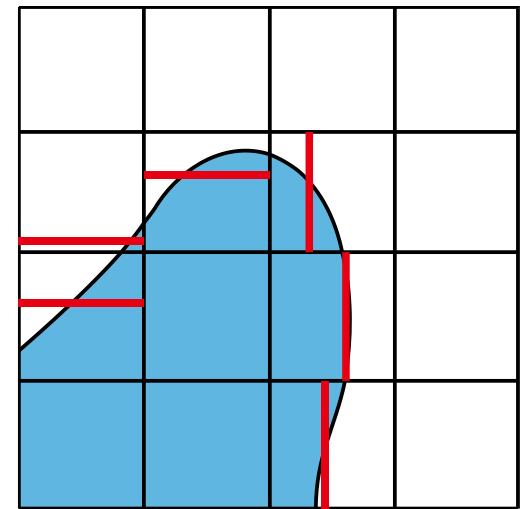
$$\vec{n} = (n_x, n_y) = \nabla \tilde{C}$$

(2) 确定界面位置；

1) Hirt 和 Nichols 的重构方案

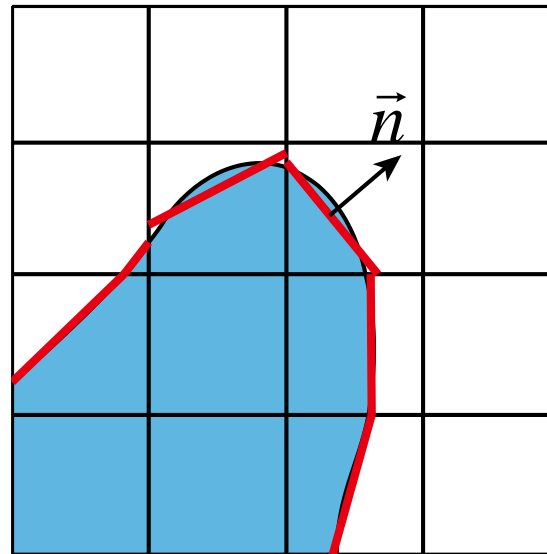
将一个网格内的相界面重构为一个**线段**。线段的方向为**二选一**：要么水平，要么竖直。线段方向的选择取决于界面法方向的哪一个分量更大。

显然，这是一种很粗糙的界面重构方法。



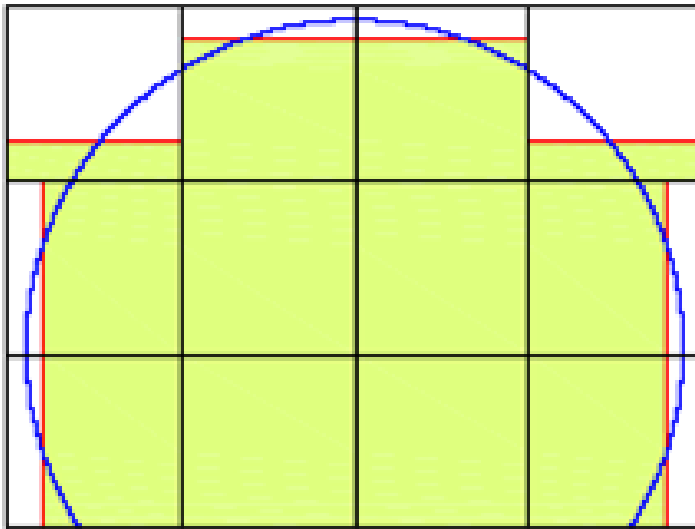
## 2) Piecewise Linear Interface Calculation (PLIC) 重构方案

将一个网格内的相界面重构为一个**线段**。线段可以是**任意坡度**，线段与界面法线方向垂直。

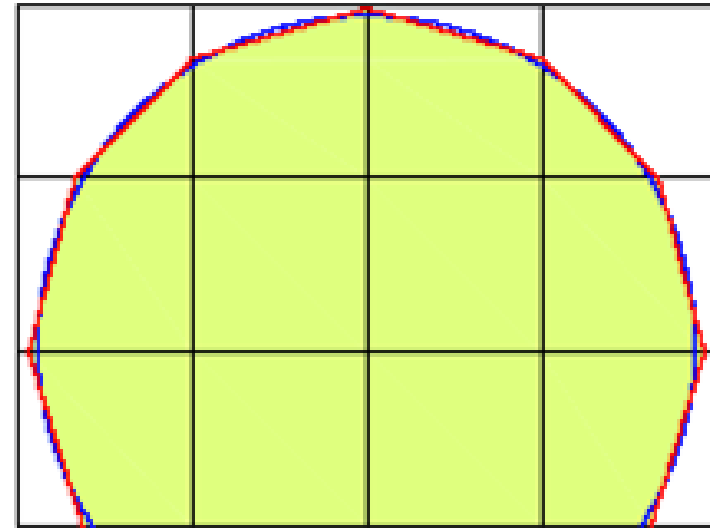


PLIC重构界面的关键在于准确的计算**界面方向**。

目前，PLIC仍是使用最广泛的VOF界面重构方法。



(a) Hirt/Nichols



(b) PLIC method

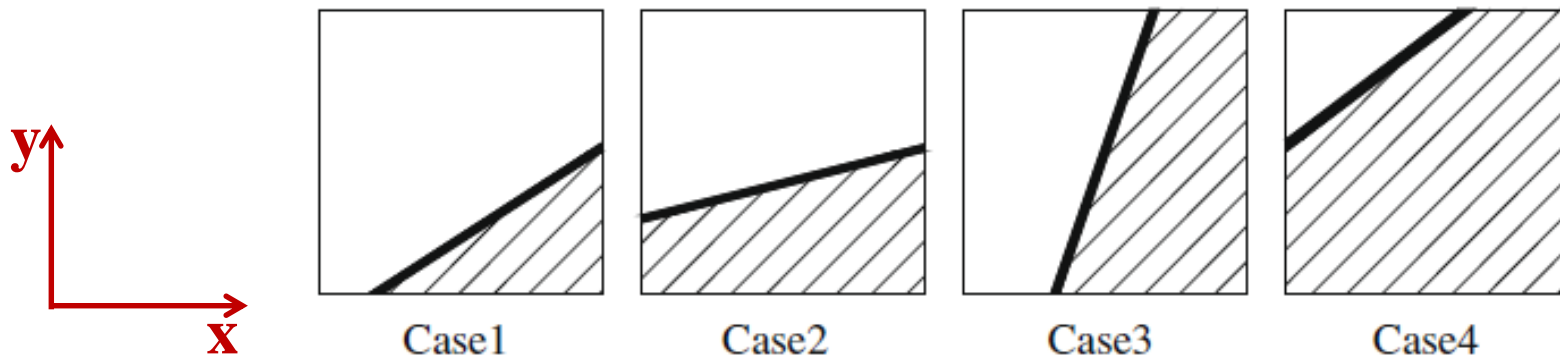
**Blue line is the actual interface, red ones are the reconstructed**

Youngs D. L., Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion.  
In: Morgan K. W., Baines M.J. (eds), Numerical methods for fluid dynamics,  
New York: Academic, 273-285,1985

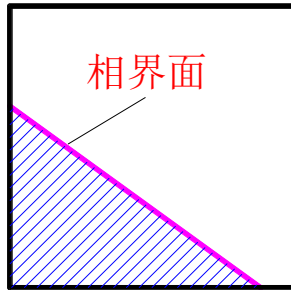
## 4. PLIC方法

### 1) 界面重构

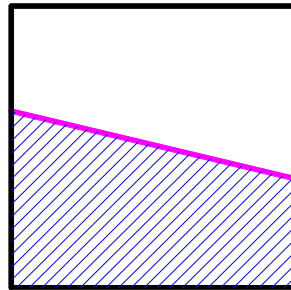
在二维问题中相界面在控制容积中的位置有16种可能的情况，取决于其表面外法线的值  $(n_x, n_y)$ ；例如对  $n_x < 0, n_y > 0$  有以下四种情况



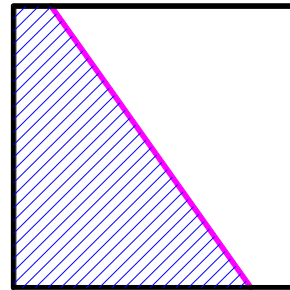
通过对界面方向进行翻转，可均化归为  $n_x > 0, n_y > 0$  的问题，可能的界面形状只有以下四种类型。



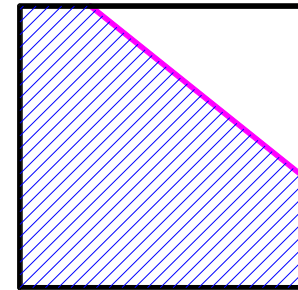
(a) 类型1



(b) 类型2



(c) 类型3



(d) 类型4

对于每一类型的界面，都可以根据以下条件用几何的方法确定其位置：

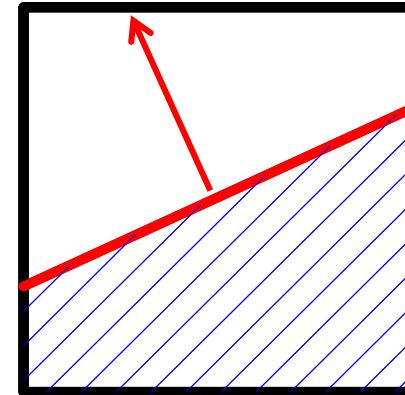
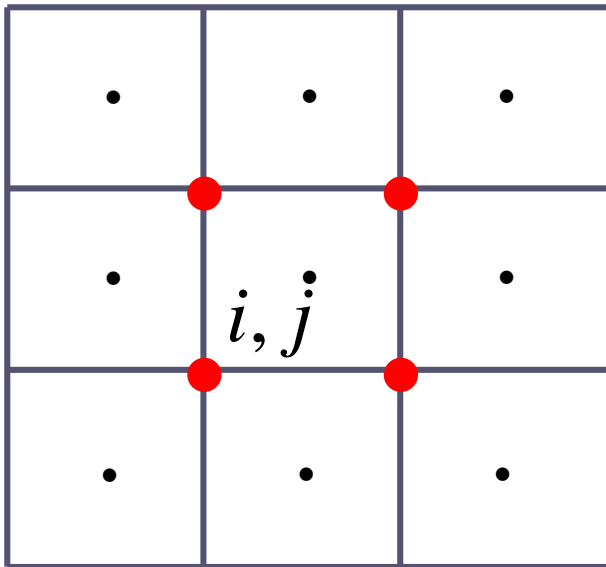
- (1) 相界面垂直于法线  $(n_x, n_y)$ ;
- (2) 阴影部分面积比等于流体体积函数;

据此，可求出线段的两个**端点**，也就完成了界面重构。

# 界面法线矢量的两个分量可用相邻九点的 $C$ 值确定:

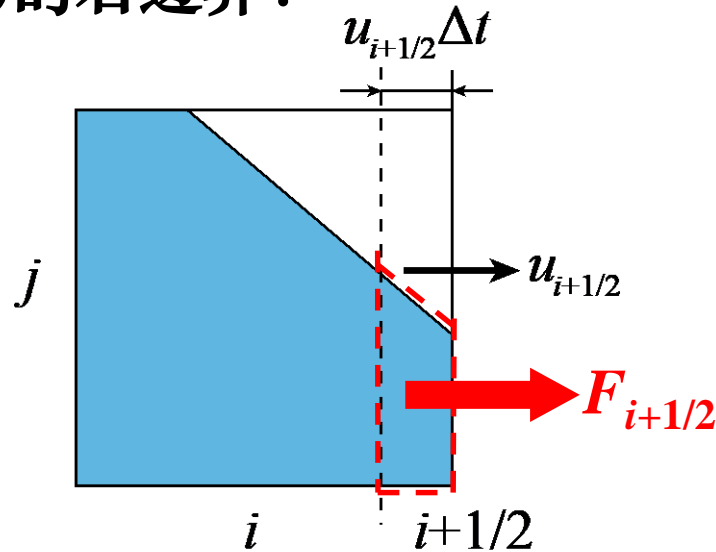
$$n_{i,j}^x = (C_{i+1,j+1} + 2C_{i+1,j} + C_{i+1,j-1} - C_{i-1,j+1} - 2C_{i-1,j} - C_{i-1,j-1}) / 8\delta x$$

$$n_{i,j}^y = (C_{i+1,j+1} + 2C_{i,j+1} + C_{i-1,j+1} - C_{i+1,j-1} - 2C_{i,j-1} - C_{i-1,j-1}) / 8\delta y$$



## 2) 界面推进

考虑网格 $(i,j)$ 的右边界:



如果 $u_{i+1/2} > 0$ , 红色虚线部分流体从右边界流过界面;

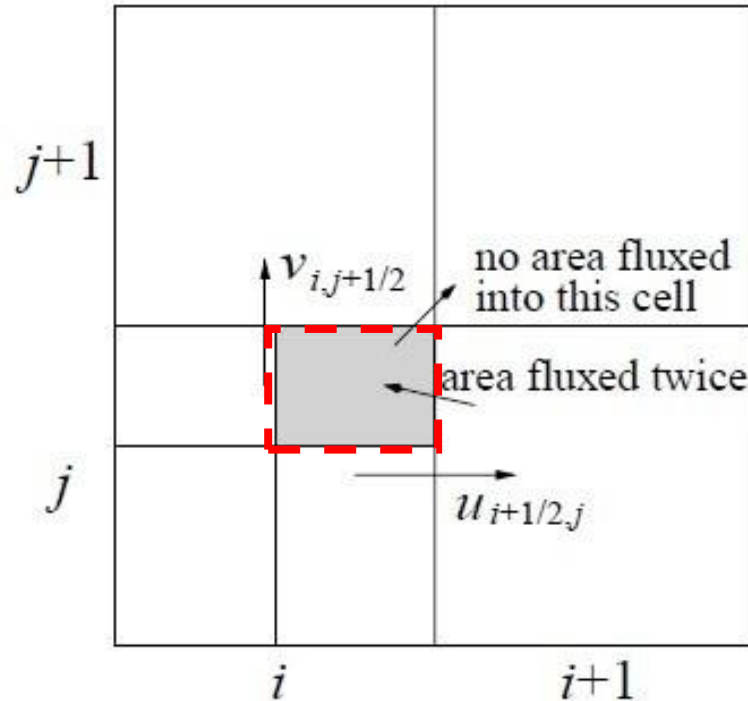
如果 $u_{i+1/2} < 0$ , 在网格 $(i+1, j)$ 中计算界面  $i+1/2$ 上流入的流量。

用同样的方法计算网格上、下、左边界主相流体的流出量:

$$C_{i,j}^{t+\Delta t} = C_{i,j}^t + \left( F_{i-1/2,j} - F_{i+1/2,j} + F_{i,j-1/2} - F_{i,j+1/2} \right) / \Delta V$$



这是一种方向分裂 (**split**) 的推进算法, 其不足之处在于一部分体积被重复计算。



虚线所示面积被重复计算。

G. Tryggvason, R. Scardovelli, S. Zaleski, Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows, Cambridge University Press, New York, 2011

目前已发展出基于许多PLIC的非分裂(**unsplit**)推进算法,  
例如:

**J. López, J. Hernández, P. Gómez, F. Faura, A volume of fluid method based on multidimensional advection and spline interface reconstruction, J. Comput. Phys, 195, 718-742, 2004**

**J. Hernández, J. López, P. Gómez, F. Faura, A new volume of fluid method in three dimensions. Part I: Multidimensional advection method with face-matched flux polyhedra, Int. J. Numer. Meths. Fluids, 58, 897-921,2008**

下列论文的作者也公布了他们的计算程序:

**VOFTools, a package of FORTRAN subroutines with analytical and geometrical tools for 2D/3D VOF methods in general grids**  
<http://www.dimf.upct.es/personal/lrj/voftools.html>

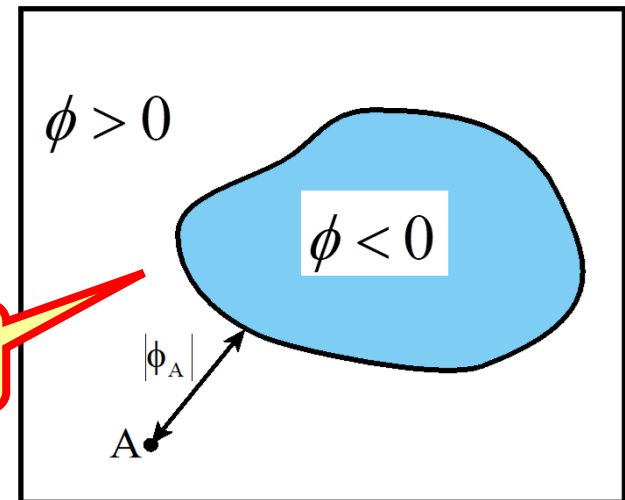
## 4.1.3 Level Set 方法简介

### 1. 符号距离函数

Level Set方法用一个连续函数  $\phi$  (Level set函数)的**零等值面**表示相界面。用其正负表示位于哪一相

- $\phi < 0$  表示位于主相中
- $\phi > 0$  表示位于另一相中
- $\phi = 0$  表示位于相界面上

相界面

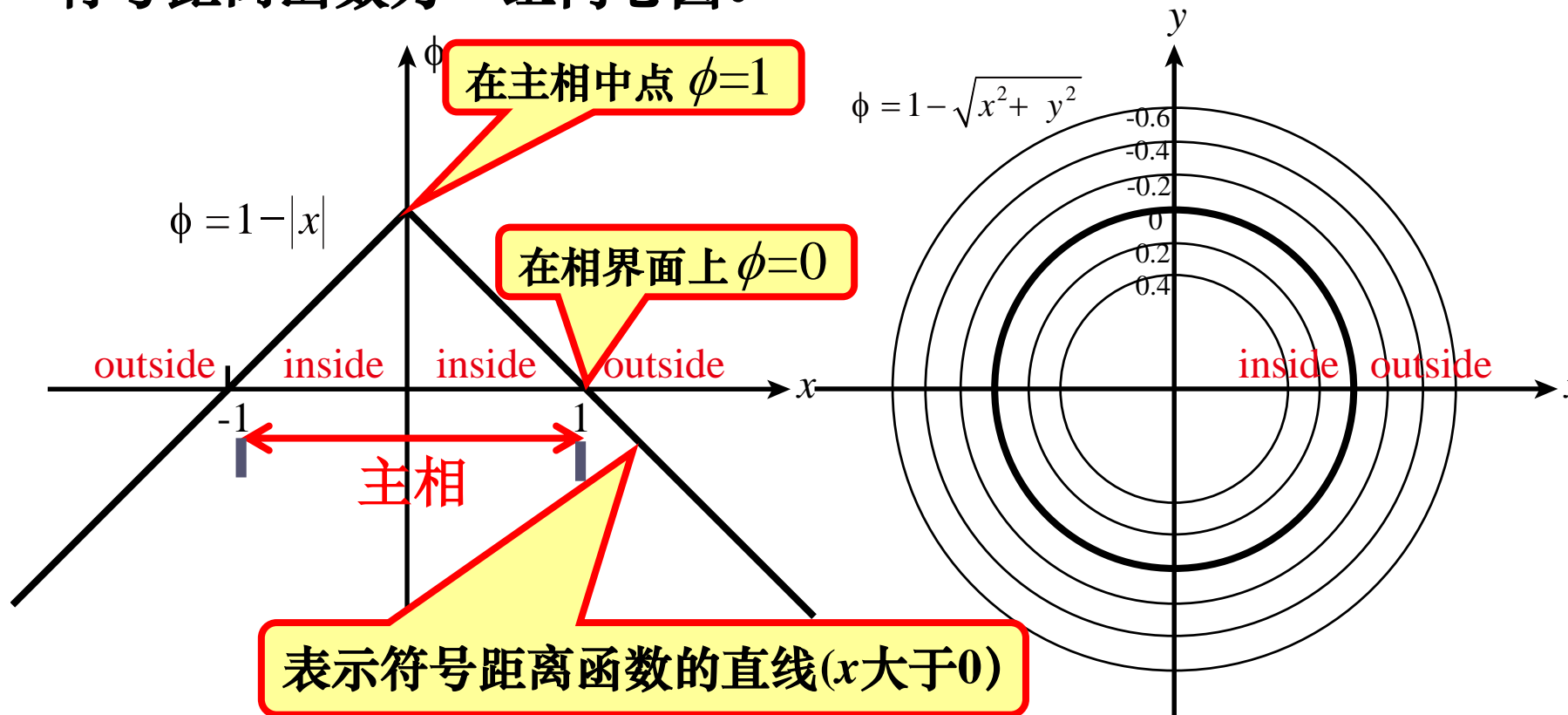


**符号距离函数 (Signed Distance Function)**就是一种Level Set函数。对于某一点的符号距离函数，其绝对值等于这个点到相界面的**最近距离**，符号则取决于这个点位于哪一相。

S. Osher, J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. J. Comput. Phys, 79 (1988)12-49

用两个例子来说明**符号距离函数 (正负值随定义而异)**。

- (1) 一维区域，主相占据  $[-1, 1]$  区间；
- (2) 二维区域，主相占据以原点为圆心，半径为 1 的圆内部。则符号距离函数为一组同心圆。



符号距离函数的特点：

(1) 在相界面附近**连续光滑**；

(2)  $|\nabla \phi| = 1$  距离对距离求导数！

## 2. 符号距离函数在两相流模拟中的应用

### 1) 计算界面方向与曲率

符号距离函数可以用于计算界面方向与曲率：

$$\vec{n} = \nabla \phi \quad \kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

由于符号距离函数在相界面附近连续光滑的特点，用其计算界面曲率与方向与曲率比用流体体积函数要准确的多。

## 2) 计算光顺化的Heaviside函数

用符号距离函数可以定义**光顺化的Heaviside函数**:

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & (\phi < -\varepsilon) \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\phi}{\varepsilon} - \frac{1}{\pi} \sin(\pi\phi / \varepsilon) \right] & (|\phi| \leq \varepsilon) \\ 1 & (\phi > \varepsilon) \end{cases}$$

$\varepsilon$  表示界面处光顺化的宽度，一般取  $1.5\Delta$  ( $\Delta$ 为网格尺寸)

## 3) 设置两相流的物性分布

利用光顺化的Heaviside函数 $H$ 和两相的物性可以设置对计算区域的物性分布:

$$\rho = \rho_g (1 - H_\varepsilon(\phi)) + \rho_l H_\varepsilon(\phi)$$

$$\eta = \eta_g (1 - H_\varepsilon(\phi)) + \eta_l H_\varepsilon(\phi)$$

以这种物性来算流场以考虑存在两相的事实。**主相是液相**还是气相取决于模拟什么问题。

## 4) 计算表面张力

气液两相流的模拟还需要考虑相界面上的表面张力。**CSF (Continuum surface force)** 模型可以把表面张力转换为相界面附近控制容积中的体积力，并用符号距离函数计算：

$$F_{sv} = -\sigma\kappa(\phi)\nabla H(\phi)$$

$\sigma$  为表面张力系数；

$\kappa(\phi)$  为界面曲率，通过符号距离函数计算；

$\nabla H(\phi)$  为界面  $H$  函数的梯度。

**符号距离函数**直接表示了节点到相界面的距离。因此，符号距离函数为两相流的直接模拟提供了很多方便，是首选的 **Level Set** 函数。

J. U. Brackbill, D. B. Kothe, C. Zemach. A continuum method for modeling surface tension. J Comput Phys. 100(1992) 335-354

### 3. 用Level Set函数追踪相界面

Level Set函数的推进也可表示为纯对流方程：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi = 0$$

如果用上述纯对流方程来推进Level Set函数时，一般设置了初始符号距离函数，但是在推进过程中距离函数的特征会改变。因此，在每一个时层完成推进后，一般还需做进一步数学处理，重新初始化，以将推进后的Level Set 函数具有符号距离函数的特点。

符号距离函数应该满足： $|\nabla \phi| = 1$

S. Osher, R. Fedkiw, Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces, Springer, 2002



**重新初始化**方程的求解目标是使Level Set函数在零等值面不改变的情况下满足  $|\nabla \phi| = 1$ ，恢复为符号距离函数。

Level Set 推进方程和重新初始化方程的求解一般采用**高阶的ENO(Essential Non-Oscillatory) 格式**。重新初始化的方程也是一个纯对流方程！

Level Set 方法的一个优势是**简单方便**，从二维到三维的推广也十分容易。因此在更复杂的两相流（例如相变）模拟应用广泛。

Level Set方法的缺点是：除了计算上比较费时外，它仅追踪  $\phi = 0$  的等值面，难以保证相的总体质量守恒性。

A Harten , B Engquist, S. Osher, et al., Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes , J. Comput Physics, 1987, 71:231-303

## 4.2 捕捉界面的VOSET方法

### 4.2.1 VOSET方法的基本思想

### 4.2.2 VOSET方法中距离函数的计算

D.L. Sun, W.Q. Tao, A coupled volume-of-fluid and level set method (VOSET) for computing incompressible two-phase flows, Int. J. Heat Mass Transfer, 53, 645-655, 2010

**推荐阅读(13)**

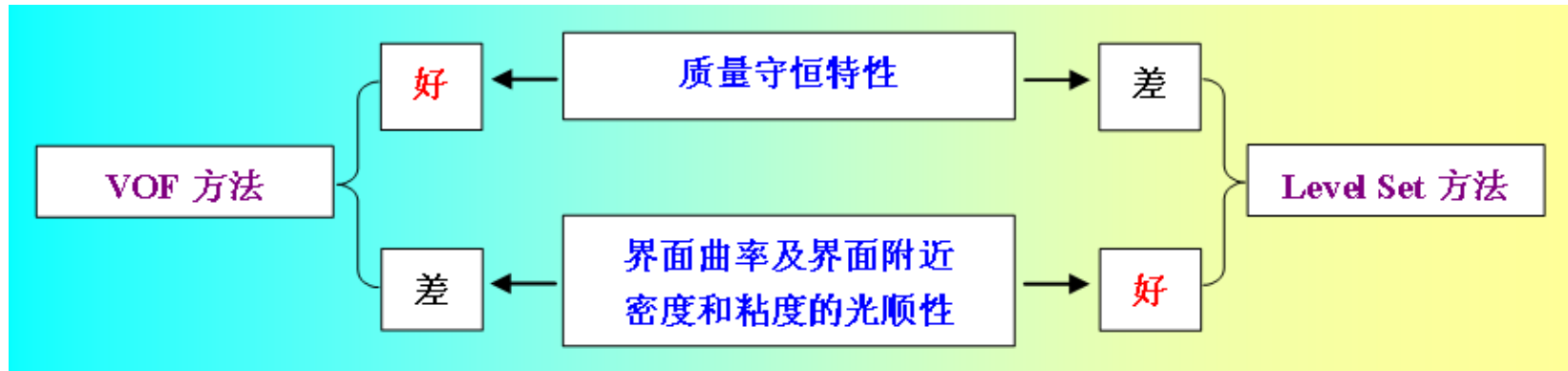


**孙东亮**

## 4.2 捕捉界面的VOSET 方法

### 4.2.1 VOSET方法的基本思想

VOF方法和Level Set方法各有优缺点，而且正好互补。



如果能够同时拥有VOF中的**流体体积函数**和Level Set中的**符号距离函数**，就可以让它们发挥各自的优势，执行各自“擅长”的任务。但不宜简单的叠加，否则计算工作量会显著增加，文献中曾提出过这样的方法。

流体体积函数负责**界面重构与界面推进**，保证总体质量守恒性。

符号距离函数负责计算**界面方向与曲率**，计算**表面张力**，设置**物性**。

VOSET用流体体积函数追踪相界面，同时根据流体体积函数，用**几何方法**生成一个与之相对应的符号距离函数。这样VOSET就能同时具备VOF和Level Set方法的功能。

VOSET不是第一个将VOF及Level set 结合起来的方法，此前有Sussman (2000) 提出的CLSVOF方法及其以后的各种改进；但是在该系列方法中同时求解VOF及Level set 函数两个微分方程，使得计算工作量及复杂程度显著增加。**VOSET方法中只求解流体体积函数，但用几何方法生成距离函数。**

## 4.2.2 VOSET方法中距离函数的计算

### 1. 迭代计算的思路

#### 1) 为什么要迭代

准确的界面方向在界面捕捉中有重要意义，也与符号距离函数有密切的关系，先用已知的流体体积函数初步计算的界面方向需要改进：

$$n_{i,j}^x = (C_{i+1,j+1} + 2C_{i+1,j} + C_{i+1,j-1} - C_{i-1,j+1} - 2C_{i-1,j} - C_{i-1,j-1}) / 8\delta x$$

$$n_{i,j}^y = (C_{i+1,j+1} + 2C_{i,j+1} + C_{i-1,j+1} - C_{i+1,j-1} - 2C_{i,j-1} - C_{i-1,j-1}) / 8\delta y$$

(1) 知道了初步的界面方向，就可以用PLIC方法重构相界面；

(2) 获得重构界面后，再用下面介绍的几何方法计算符号距离函数，而通过距离函数又可以求出更准确的界面方向。

PLIC界面重构和计算符号距离函数的准确性都要求有**准确**的界面方向。因此需要用**迭代**的方法计算符号距离函数。

## 2) 如何迭代

在没有符号距离函数的时候，首先用**流体体积函数**计算一个初始的、粗略的界面方向；

在此基础上，重复以下过程：

(1) 用PLIC重构相界面：知道  $n_x, n_y$  及  $C$  即可重构；

(2) 根据重构界面，用几何方法计算符号距离函数；

(3) 用符号距离函数计算界面方向：

$$\vec{n} = \nabla \phi \quad \kappa = \nabla \cdot \nabla \phi / |\nabla \phi|$$

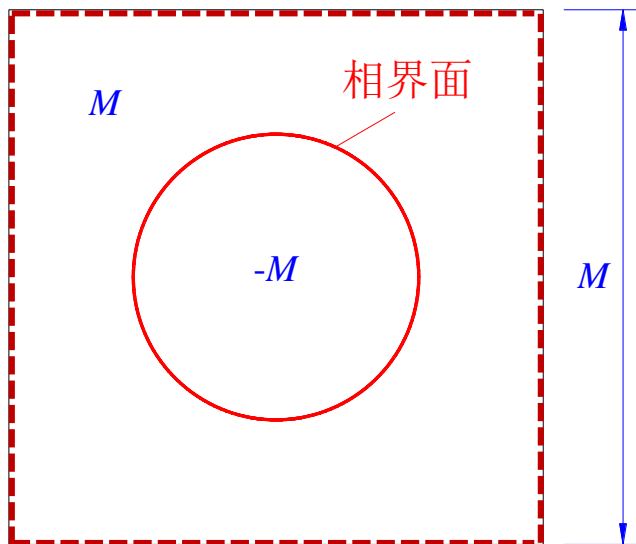
这些过程一般需要迭代三次，就可以得到准确的界面方向和符号距离函数。

前面已介绍过第 (1)步 和 第(3)步，下面详细介绍第 (2)步：计算符号距离函数的几何方法。

## 2. 计算符号距离函数的几何方法

假定已用PLIC方法获得重构界面。

**步骤 1:** 在整个计算区域内为符号距离函数赋初始值

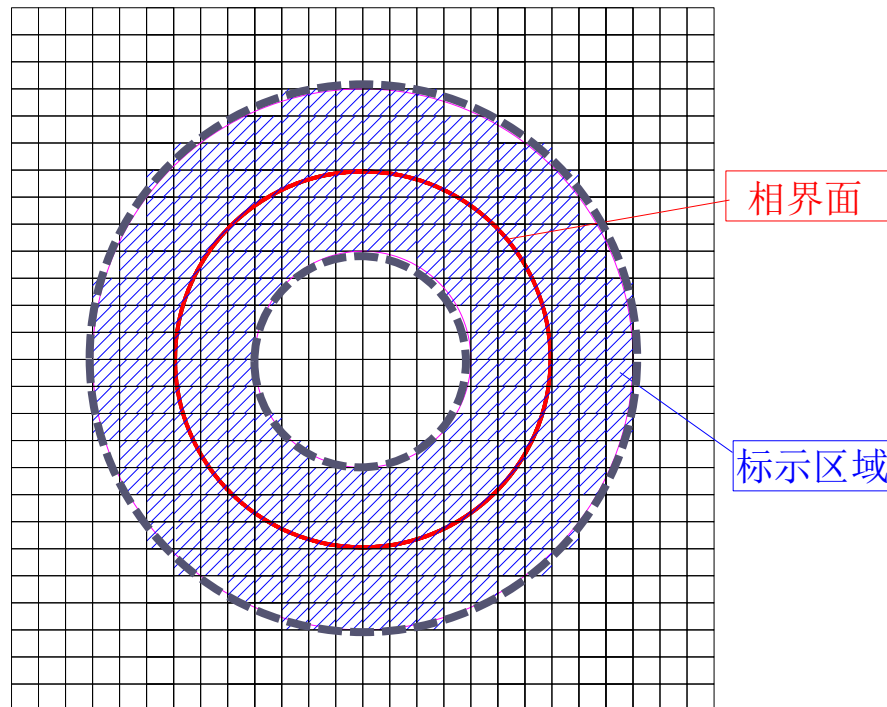


$$\phi_{i,j}^0 = \begin{cases} -M & \text{if } C_{i,j} \geq 0.5 \\ M & \text{if } C_{i,j} < 0.5 \end{cases}$$

$M$ 为计算域内两个方向的最大长度，这样可以保证界面附近的符号距离函数都包含在设定的初值范围之内。

## 步骤 2: 标记界面附近的计算网格

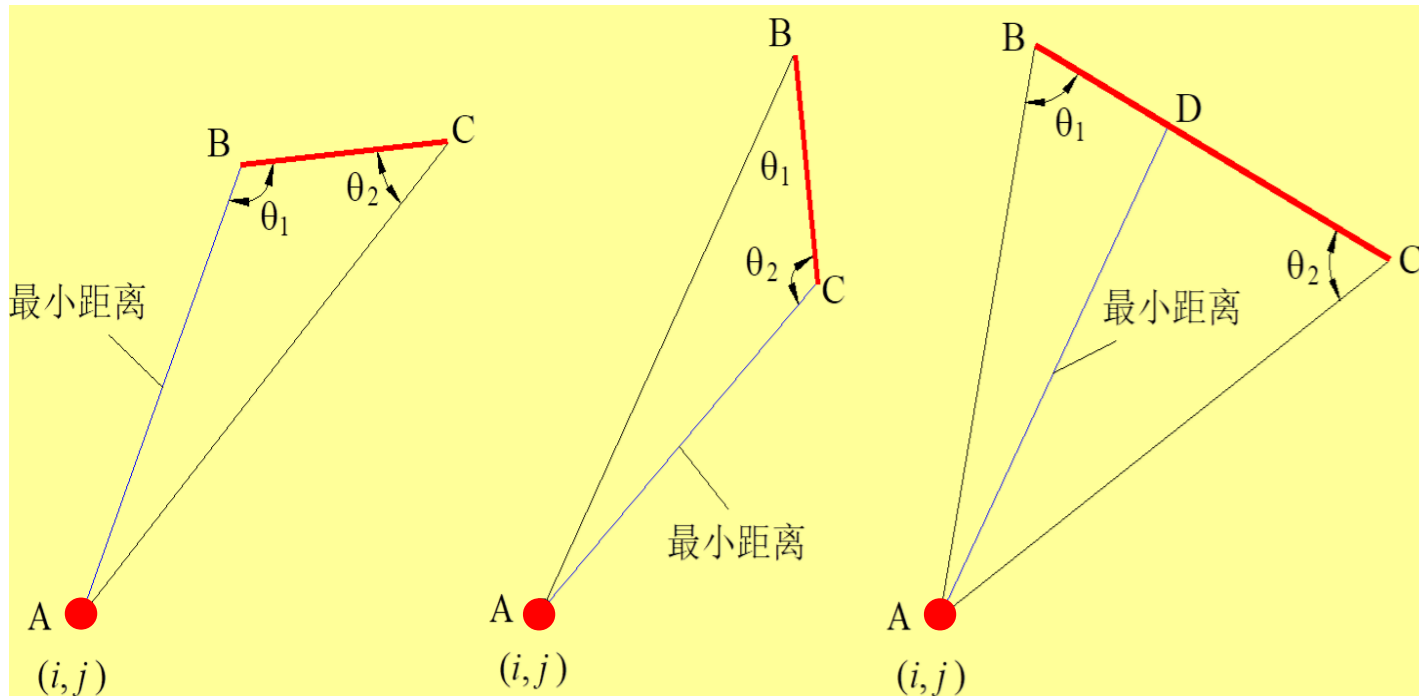
标记包含相界面一定距离范围（例如：三个网格长度）之内的网格。这一步又可**显著减少计算量**。因为实际计算中只需要相界面附近的单元的节点计算符号距离函数。





## 步骤 3: 计算被标记的单元中心与相界面的距离

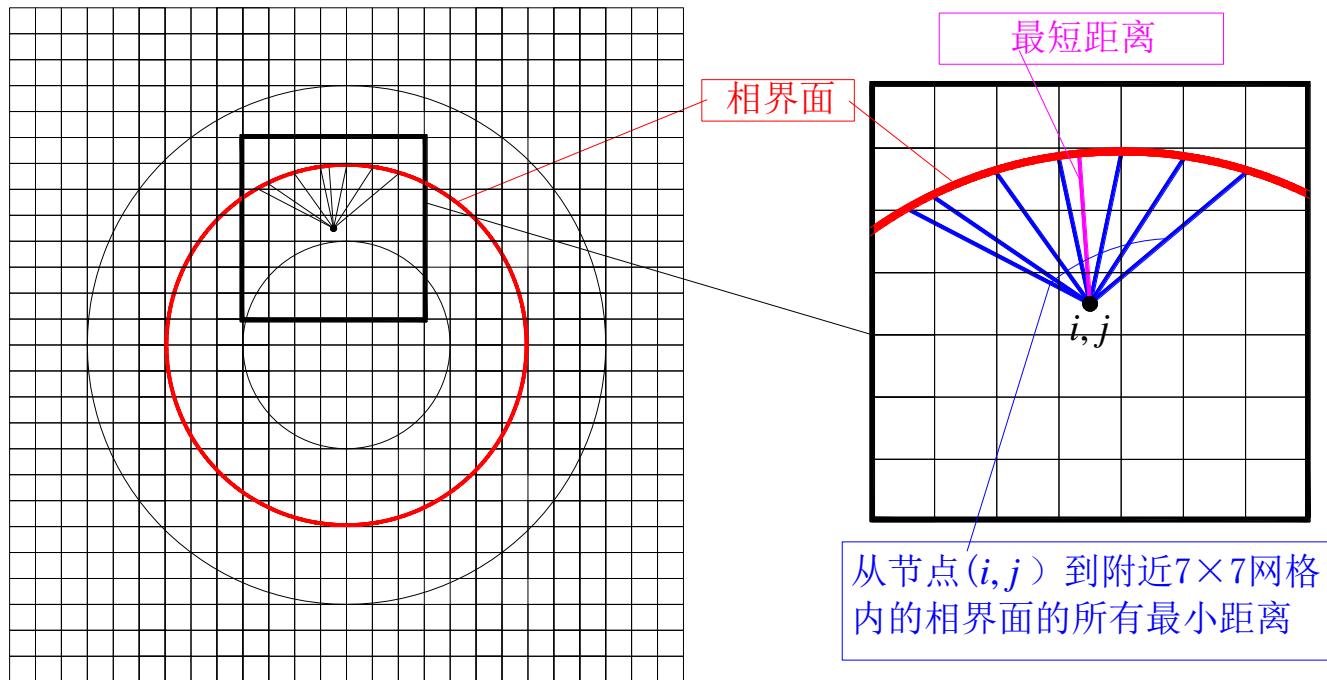
假设A ( $i, j$ )是一个被标记的计算单元，在A的附近搜寻带有相界面的网格。设此时其附近的相界面已重构为一个**线段**(BC)。于是可利用一个**三角形**( $\triangle ABC$ )计算给定点到这个线段的**最短距离**,无非三种情况:



$$\theta_1 > 90^\circ$$

$$\theta_1 < 90^\circ, \theta_2 > 90^\circ$$

$$\theta_1 < 90^\circ, \theta_2 < 90^\circ$$



在以  $(i, j)$  为中心的  $7 \times 7$  个网格内进行界面搜索；在完成了节点  $(i, j)$  附近相界面的搜寻、并求出它与这些线段之间的最短距离后，从这些最短距离中**选出最小值**。这个值就是点  $(i, j)$  到相界面的**最短距离  $d$** ，也就是该节点的**符号距离函数的绝对值**。

## 步骤4: 设置距离函数的符号

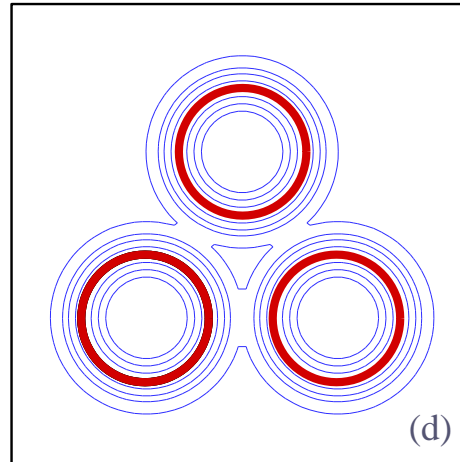
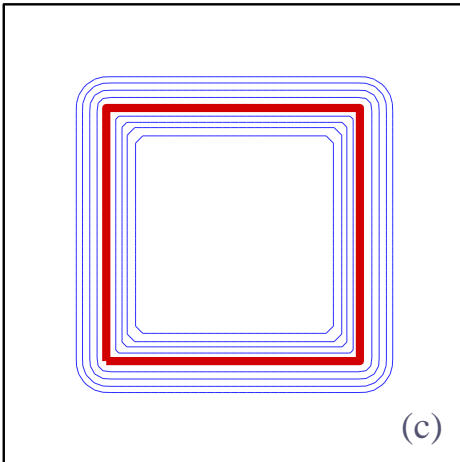
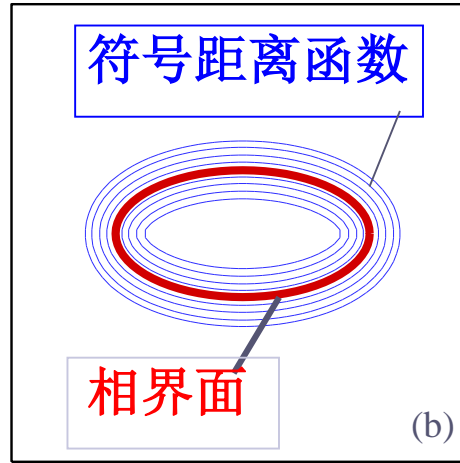
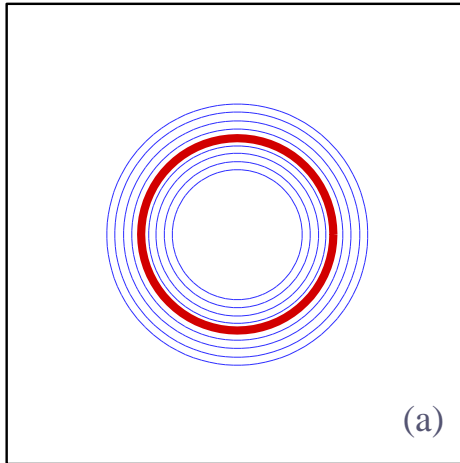
一个点的符号距离函数的正负取决于这个点位于哪一相中。

符号可以用流体体积函数来判定。如果一个网格主相流体占据的体积超过一半，就可以认为这个网格的中心位于主相内，反之则位于另一相中。因此：

$$\phi_{i,j} = \begin{cases} -d & \text{if } C_{i,j} > 0.5 \\ 0 & \text{if } C_{i,j} = 0.5 \\ d & \text{if } C_{i,j} < 0.5 \end{cases}$$

### 3. 符号距离函数计算示例

以下是迭代几何方法得到的不同形状相界面附近的符号距离函数。



对于无相变的两相流问题，如空气泡与水的流动，获得了符号近距离函数后完成了界面重构，可以进行下一时间步长的流场求解及界面的推进。

## 4.3 采用VOSET方法求解气液两相流问题

### 4.3.1 无相变过程的控制方程

### 4.3.2 无相变过程的求解步骤

### 4.3.3 有相变过程的控制方程

### 4.3.4 有相变过程能量方程的求解

### 4.3.5 数值计算实例

## 4.3 采用VOSET方法求解气液两相流问题

### 4.3.1 无相变过程的控制方程

流体体积函数方程

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}C) = 0$$

连续性方程

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

动量方程

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \mu (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) + \rho \vec{g} + \sigma \kappa \nabla H$$

重力

表面张力

每个控制容积的密度、粘性、表面张力均通过Level Set函数计算，把两相流当做变物性的单相流计算，确定流场。

Level Set函数用几何方法根据流体体积函数直接求得，因

此不需要数值求解其函数的偏微分方程，大大节省计算资源。

### 4.3.2 无相变过程的求解步骤

给定初始时刻流体体积函数 $C^0$ ，初始时刻速度 $u^0, v^0$ ；

在第  $n$  个时层的推进步骤如下：

- (1) 用 PLIC 方法，根据流体体积函数 $C^n$ 重构界面，并用几何方法计算相应的Level Set函数；
- (2) 用基于Level Set函数的Heaviside函数计算物性分布和表面张力；
- (3) 用某种流场求解算法（SIMPLER/IDEAL/Projection算法）求解下一时层的速度场  $u^{n+1}, v^{n+1}$ 和压力场  $p^{n+1}$ ；
- (4) 据计算得到的速度及界面计算下一时层各控制容积的流体体积函数 $C^{n+1}$ 。

### 4.3.3 有相变过程的控制方程 (液体沸腾, C蒸汽体积分数)

(1) 流体体积函数方程:  $\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C\vec{u}) = \frac{\dot{m}}{\rho_v}$

$\dot{m}$  为液体蒸发率

(2) 连续方程:  $\nabla \cdot \vec{u} = \dot{m} \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right)$

(3) 动量方程:  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \cdot (\vec{u}) =$

表面张力作用

$$\frac{1}{\rho_\varepsilon(\phi)} \left\{ -\nabla p + \nabla \cdot \mu_\varepsilon(\phi) [(\nabla \vec{u}) + (\nabla \vec{u})^T] + \rho_\varepsilon(\phi) \vec{g} + \sigma \kappa(\phi) \nabla H \right\}$$

(4) 能量方程:  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \alpha_l \nabla^2 T \text{ 液体区域} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \alpha_v \nabla^2 T \text{ 汽体区域} \end{array} \right.$

分区求解



## 4.3.4 有相变过程能量方程的求解及液体蒸发率的确定

利用相界面上温度为饱和温度的条件，两个区域各自求解。

**1. 边界温度确定：**对包含界面的单元 A, B, 节点 **A, B 就是边界节点**。A, B 点的温度需要通过插值获得：通过该两点做垂直于界面的线段至另一个单元，得 A' 及 B'：

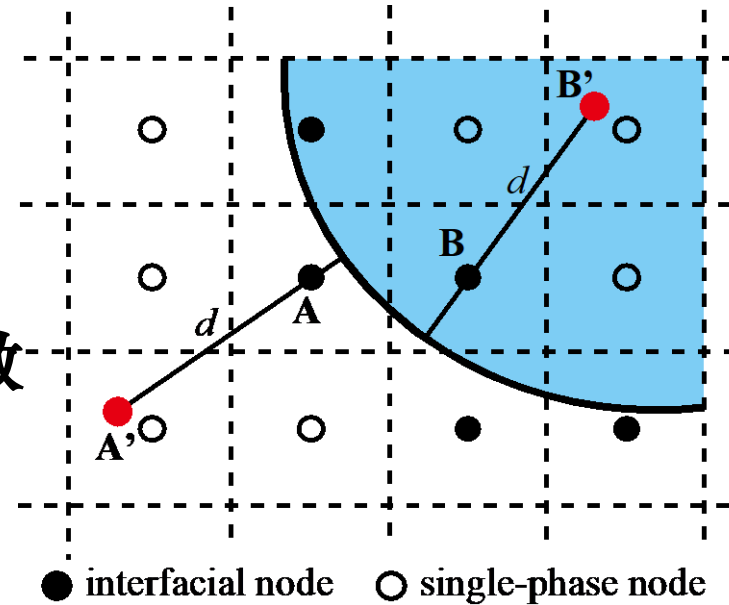
A 点的温度：

$$\frac{T_A - T_{intf}}{T_{A'} - T_{intf}} = \frac{|\phi_A|}{|\phi_A| + d}$$

$d$  为 A' 与 A 的距离， $\phi$  为符号距离函数

B 点的温度：

$$\frac{T_B - T_{intf}}{T_{B'} - T_{intf}} = \frac{|\phi_B|}{|\phi_B| + d}$$

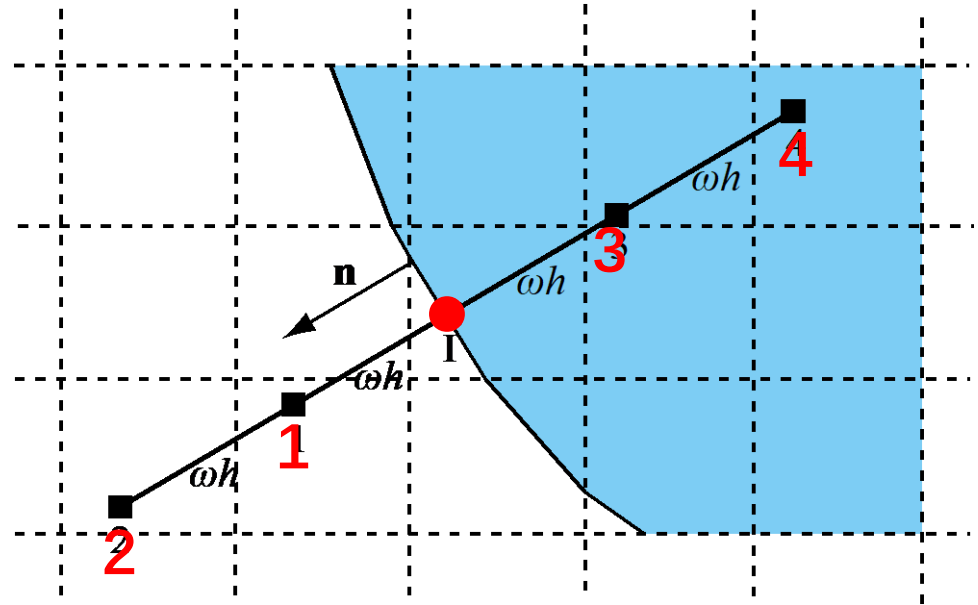


**A' 及 B' 本身的温度用插值获得；**本次迭代计算获得的 A 及 B 点的温度，作为下一次迭代计算两个区域已知的边界温度。

## 2. 液体蒸发率 $m$ 计算:

取决于界面的热流密度。采用探测点法来确定。

在相界面上找一点 I, 沿界面法线向两侧等间距确定点 1, 2, 3, 4; 利用该四点周围已知温度插值得出四点的温度, 然后按照 **Fourier** 定律



$$q = \lambda_l \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_l - \lambda_v \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_v$$

线性插值:  $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_l \cong \frac{T_1 - T_2}{\omega h}$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_v \cong \frac{T_3 - T_4}{\omega h}$$

二次插值:  $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_l \cong \frac{T_2 - 4T_1 + 3T_i}{2\omega h}$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_v \cong \frac{T_i - 4T_3 + 3T_4}{2\omega h}$$

## 4.3.5 数值计算实例

### 1. 用不同的方法计算圆的曲率

给定一个半径为 1 的静止的圆，分别用 VOF, Level Set, VOSET 在不同网格尺寸下计算圆的曲率。同时 VOSET 在迭代求解符号距离函数中选择了不同的迭代次数： $N = 1, 2, 3$ 。比较这些方法计算的曲率误差的大小。

圆的曲率与半径满足： $\kappa_{\text{exact}} R = 1$

$L_2$  误差的定义：

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (\kappa R - \kappa_{\text{exact}} R)^2}{M}}$$

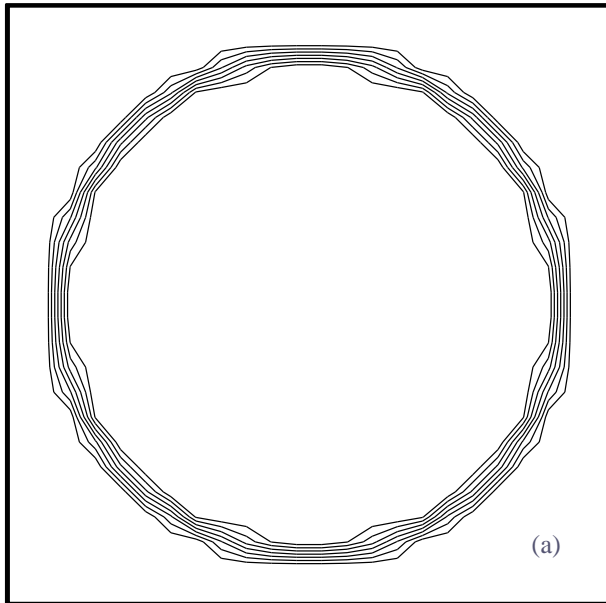
其中  $M$  为圆形相界面涉及到的计算单元数

$\kappa$  为计算得到的曲率。

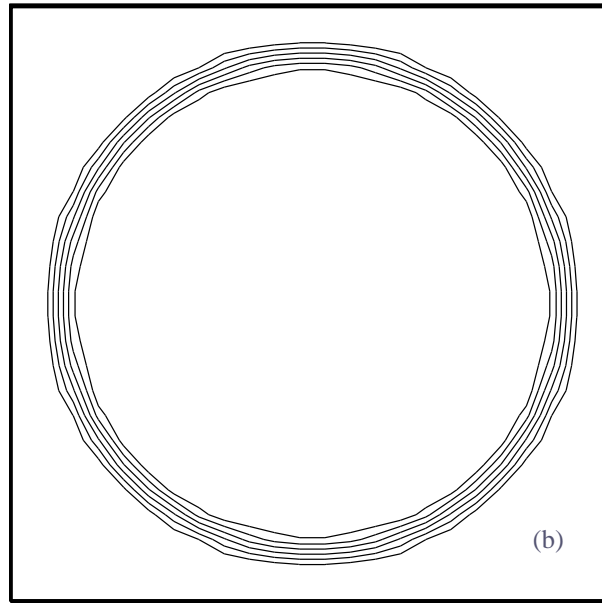
$\Delta x$	VOF $L_2$	LS $L_2$	VOSET		
			$N=1$ $L_2$	$N=2$ $L_2$	$N=3$ $L_2$
1/20	0.427	$2.010 \times 10^{-2}$	$4.504 \times 10^{-2}$	$5.362 \times 10^{-2}$	$5.470 \times 10^{-2}$
1/40	0.825	$4.347 \times 10^{-3}$	$5.721 \times 10^{-2}$	$5.712 \times 10^{-2}$	$5.855 \times 10^{-2}$
1/80	0.922	$1.030 \times 10^{-3}$	$8.351 \times 10^{-2}$	$4.678 \times 10^{-2}$	$4.729 \times 10^{-2}$
1/160	1.585	$2.536 \times 10^{-3}$	0.165	$4.033 \times 10^{-2}$	$3.628 \times 10^{-2}$
1/320	3.018	$6.329 \times 10^{-5}$	0.320	$5.311 \times 10^{-2}$	$3.926 \times 10^{-2}$
1/640	6.111	$1.570 \times 10^{-5}$	0.481	$6.898 \times 10^{-2}$	$3.709 \times 10^{-2}$

(1) VOSET 计算曲率的准确性远优于 VOF;

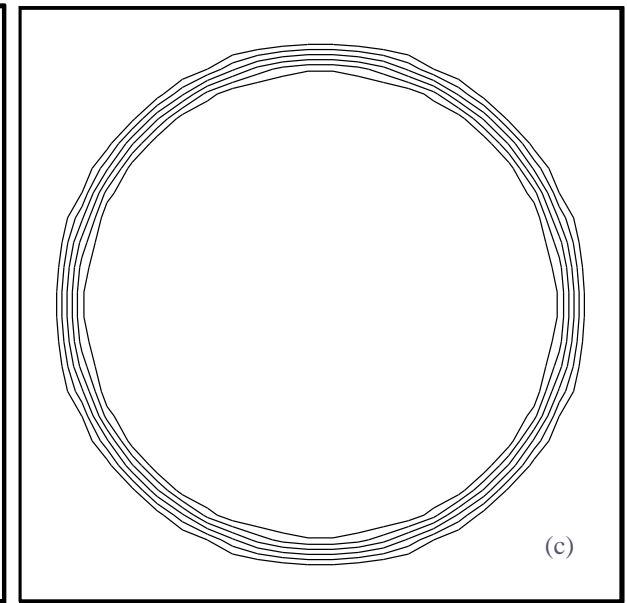
(2) 迭代次数增加, VOSET 计算曲率的准确性会提高; 迭代三次偏差已经下降到 5% 或以下, 已经可以接受。



**VOF**



**Level Set**



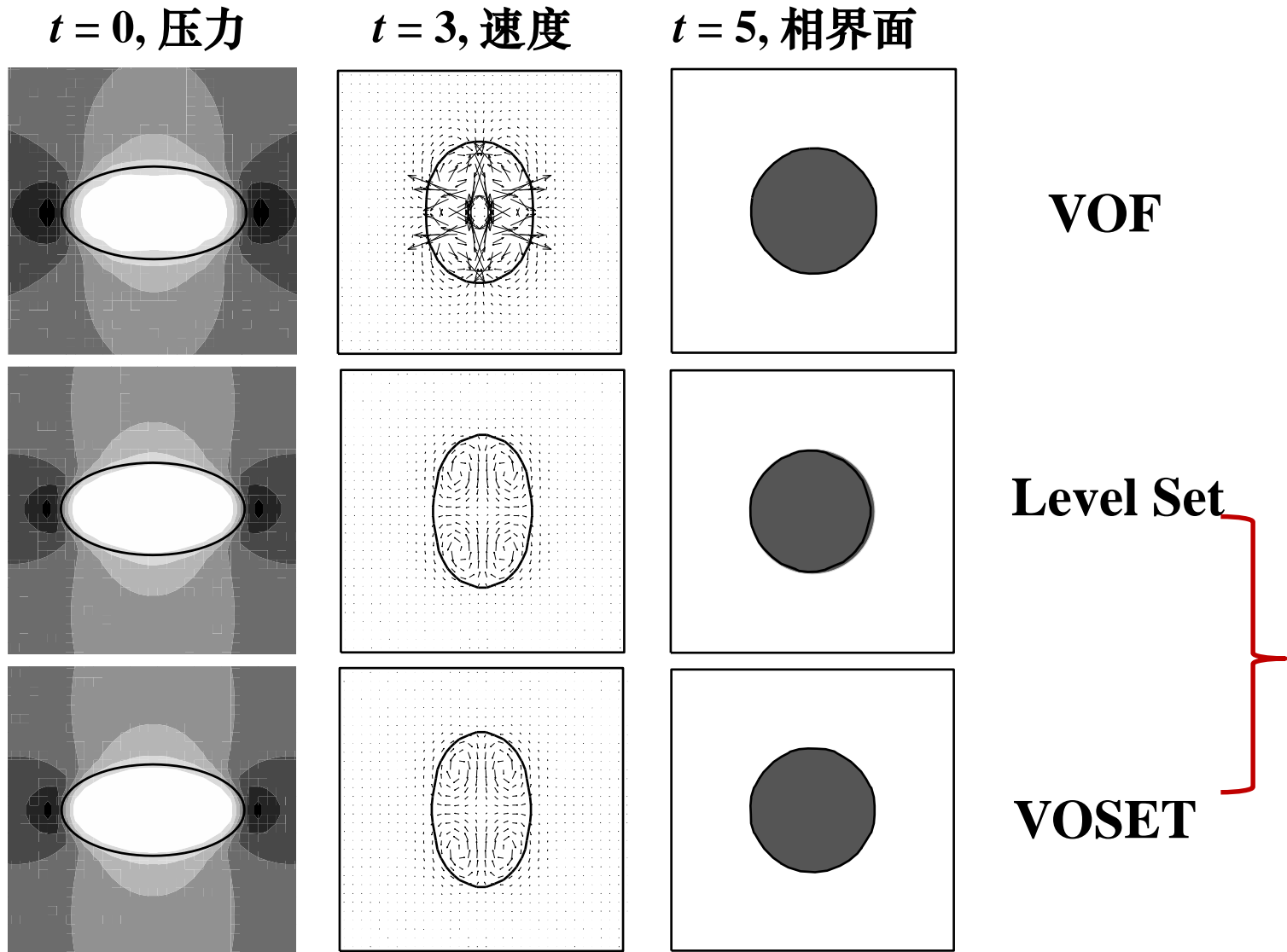
**VOSET**

## 2. 椭圆形气泡的震荡

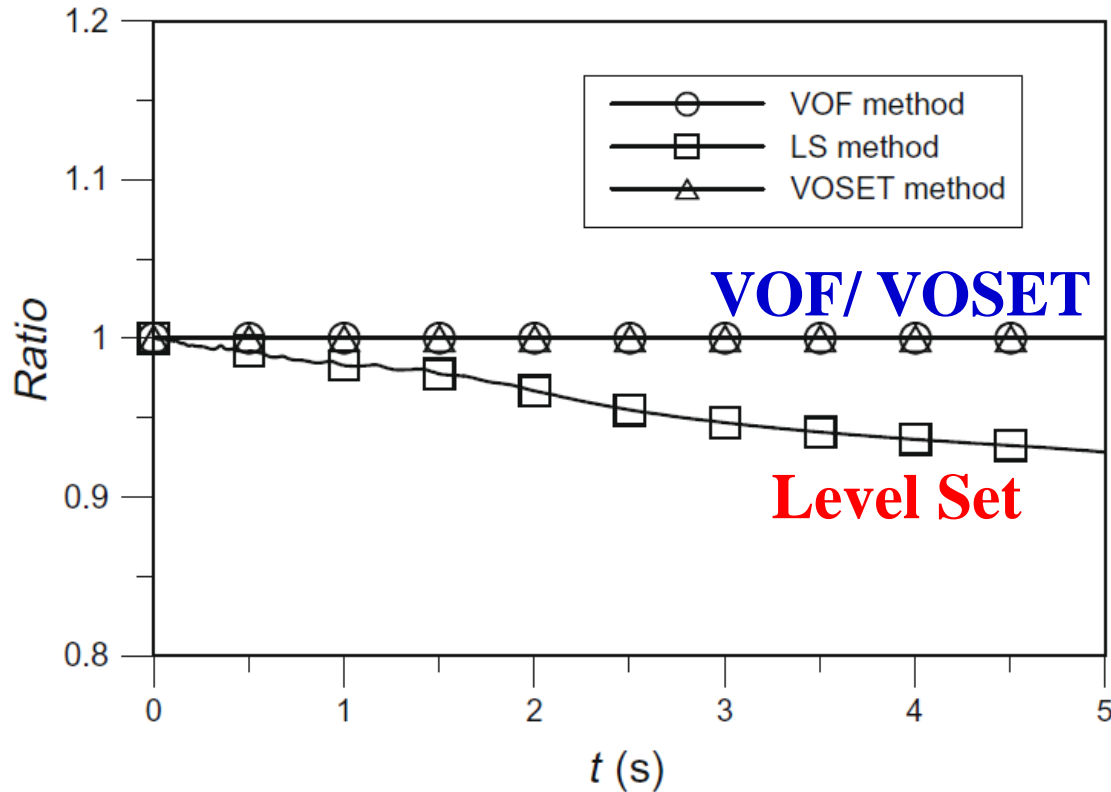
无重力的条件下，在**静止**的液体中放置一个初始的**椭圆**气泡。

椭圆界面上的曲率并不均匀，因此表面张力不均匀。  
不均匀的表面张力会导致气泡的震荡。

液体的**粘性**使震荡逐渐减弱，最终气泡会变成圆形  
并保持静止。



**VOSET继承了Level Set计算表面张力的准确性，优于VOF。**



$$\text{质量比率 (Ratio)} = \frac{\text{计算时刻主相流体的质量}}{\text{初始时刻主相流体的质量}}$$

**VOSET 继承了 VOF 的总体质量守恒性，优于 Level Set。**



### 3. 单个气泡的上升

在静止的液体放置一个气泡，气泡在浮力的作用下上升。

气泡在上升的过程中受到**浮力**、**粘性力**和**表面张力**的共同作用，最终形成的稳定的气泡形状由无量纲数 **Morton number**和 **Eotvos number** 决定。

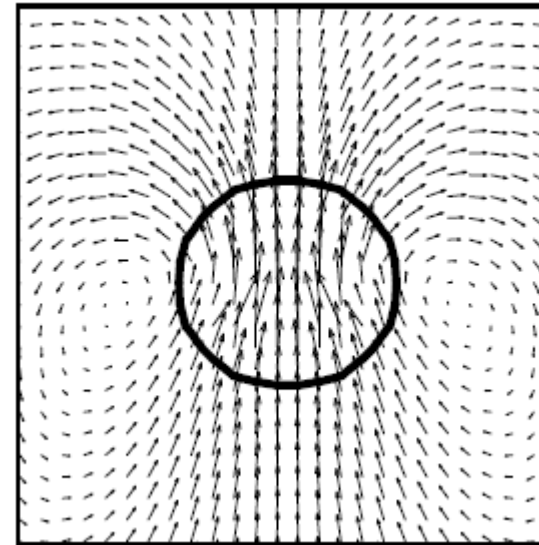
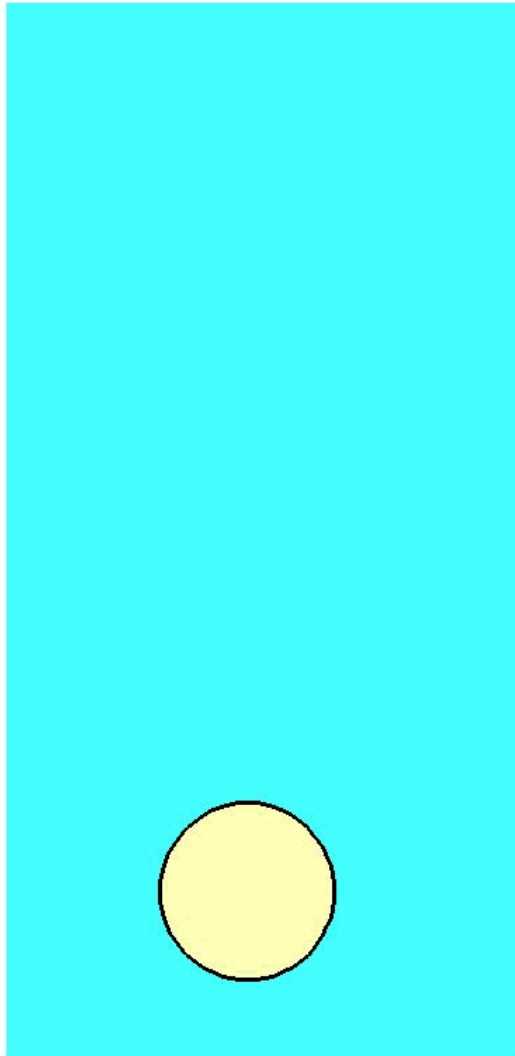
$$M = g\eta_l^4 / \rho_l\sigma^3$$

表征**粘性力**与**表面张力**的对比关系

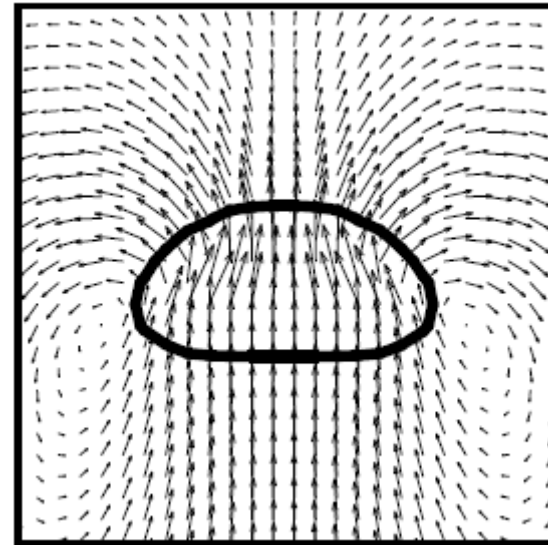
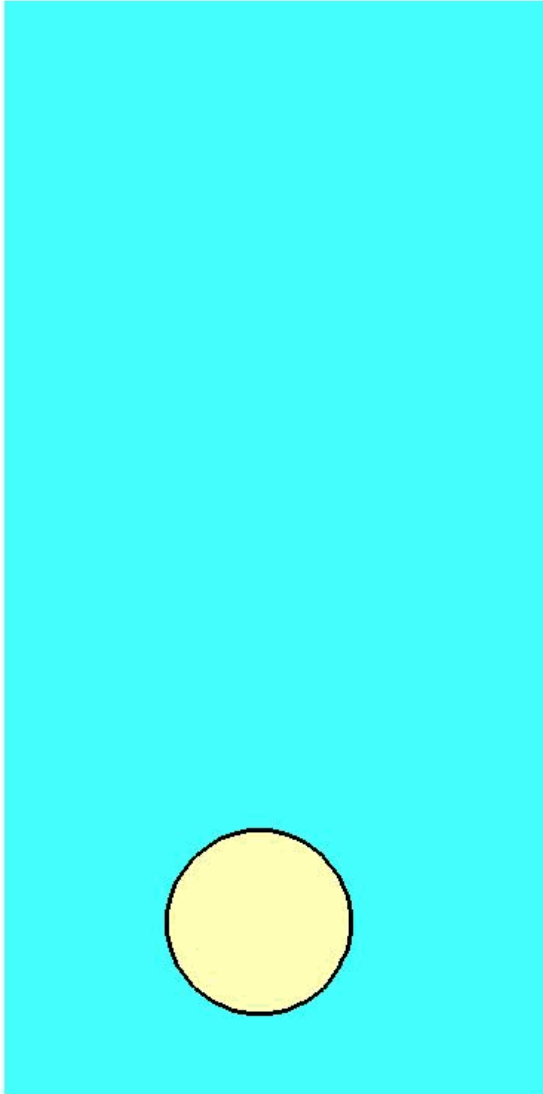
$$Eo = gd_e^2(\rho_l - \rho_g) / \sigma$$

表征**浮力**与**表面张力**的对比关系

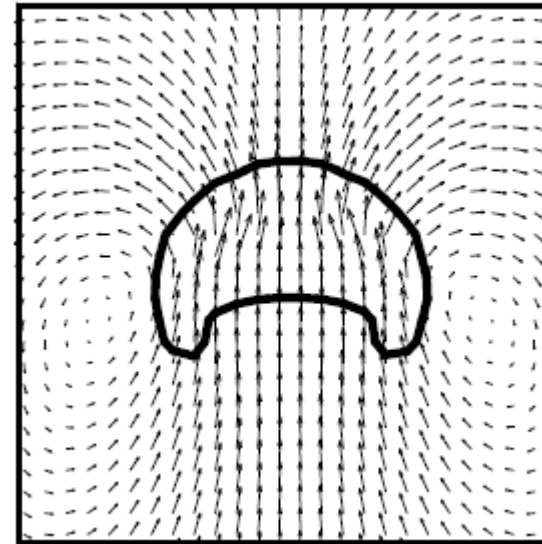
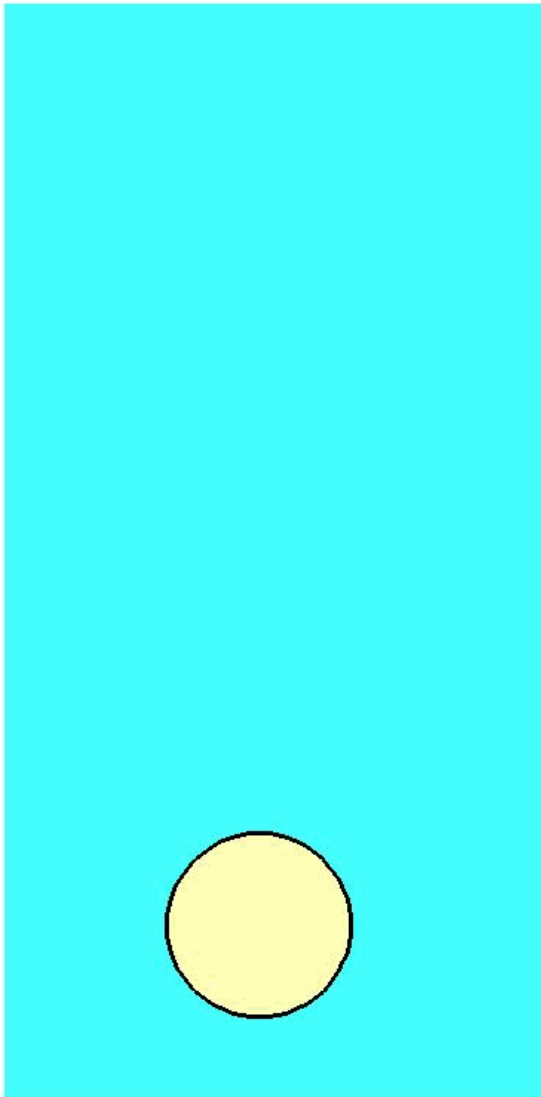
# Case 1: $Eo = 1.0$ , $M = 0.001$ , 会形成球圆形气泡



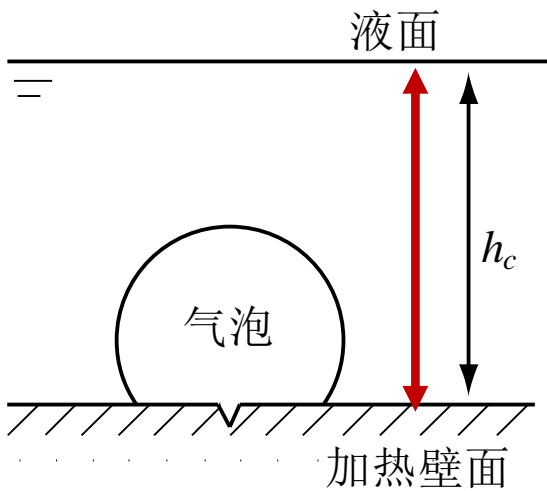
# Case 2: $Eo = 10.0$ , $M = 0.1$ , 会形成椭圆形气泡



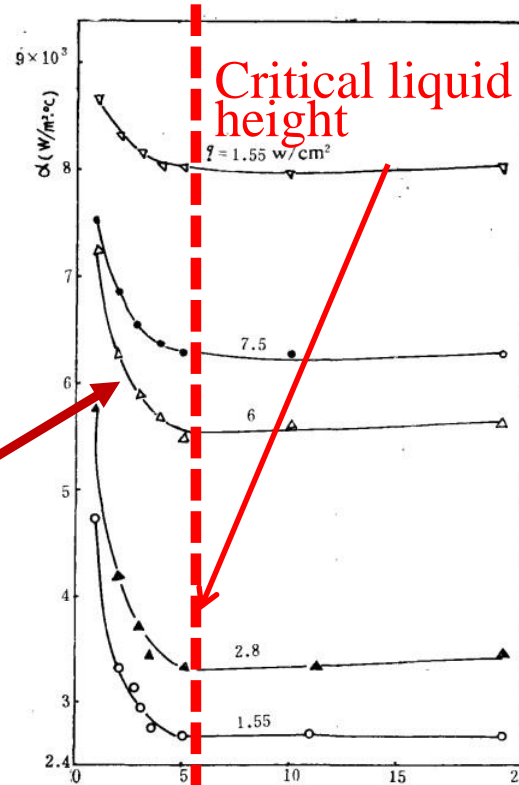
# Case 3: $Eo = 100.0$ , $M = 1000$ , 会形成球帽形气泡



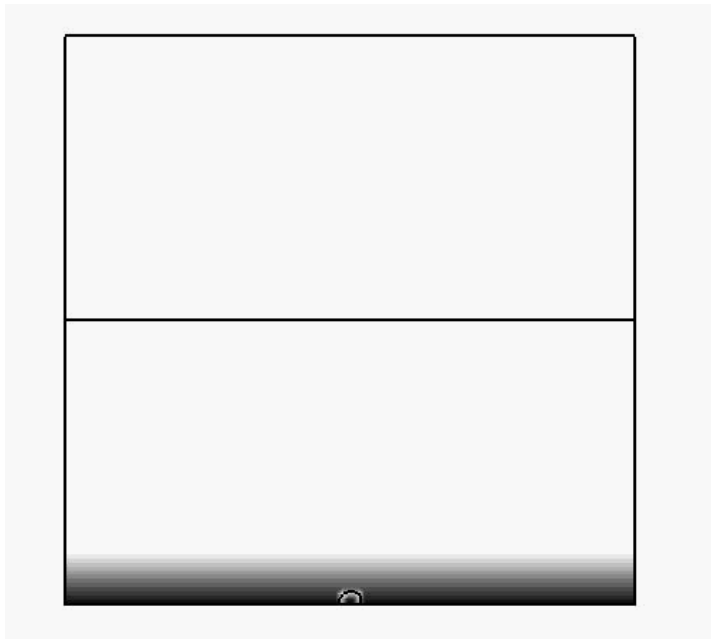
# 4. 浅液层沸腾过程



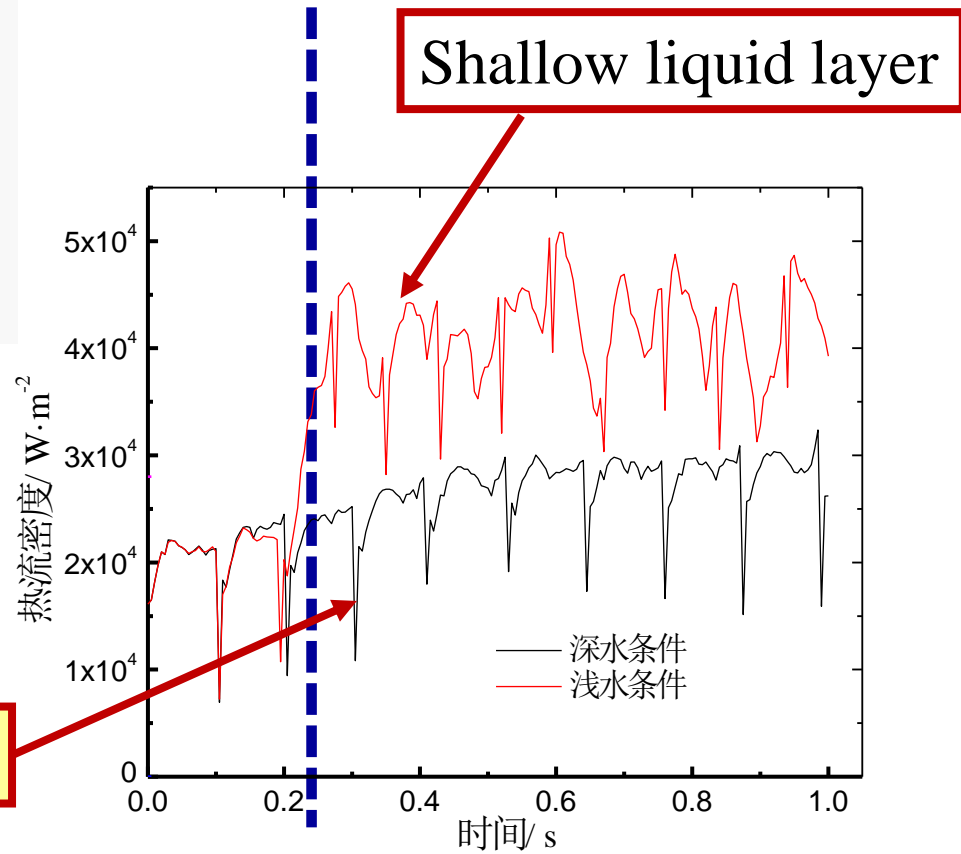
浅液层中的沸腾



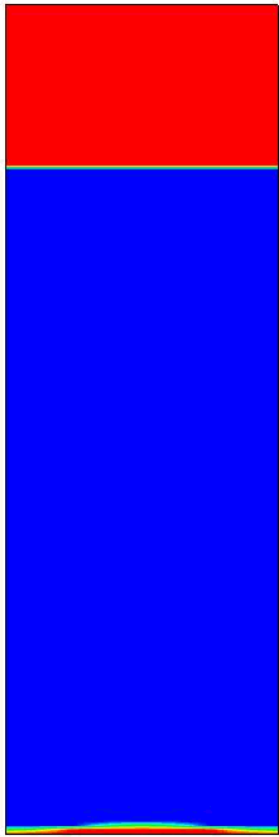
When the height of liquid over a heating plate is less than a certain value boiling heat transfer can be significantly enhanced.



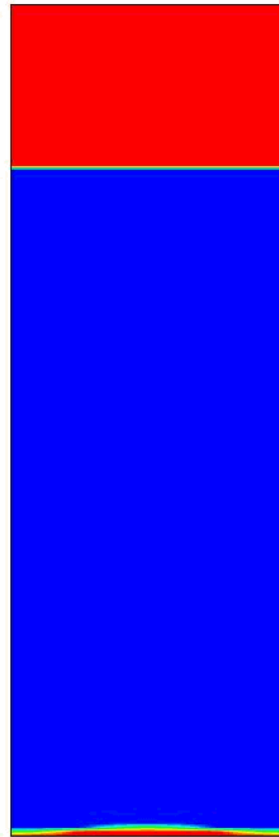
Deep liquid layer



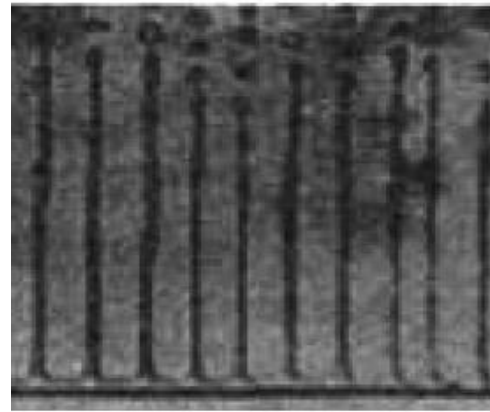
# 5.膜态沸腾模拟



低过热度



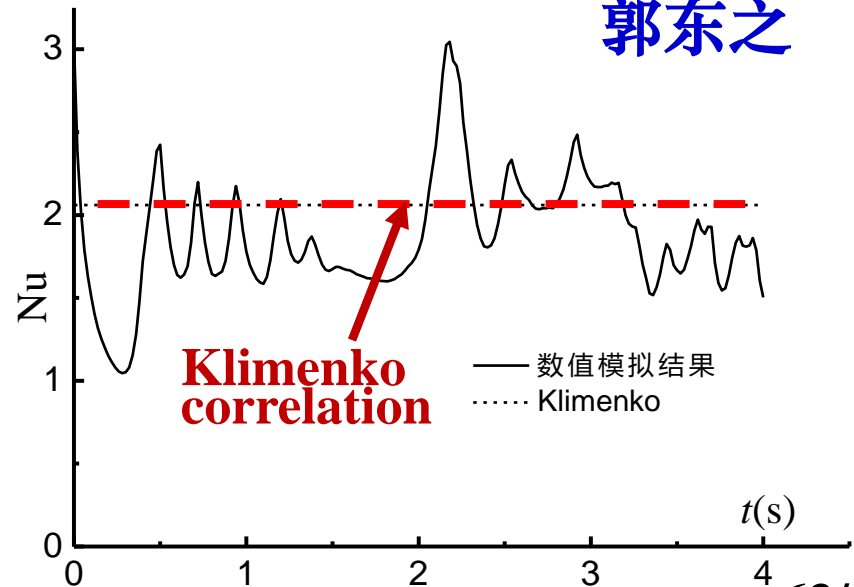
高过热度



Experiment by Reimann and Grigull (1975)



郭东之



## 4.4 VOSET向三维的推广

### 4.4.1 VOSET从二维推广到三维需要解决的问题

### 4.4.2 VOSET从二维到三维的简单推广---沿用二维问题的方法

### 4.4.3 VOSET从二维到三维的智慧推广---利用体积分数与界面位置之间的内在联系

### 4.4.4 三维VOSET应用例子

### 4.4.5 国内外学术界的评价及推广



## 4.4 VOSET向三维的推广

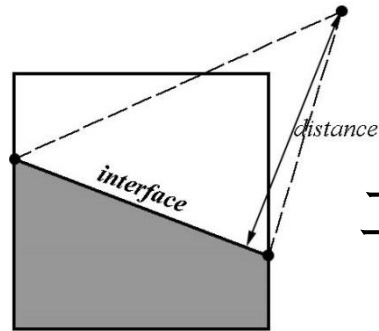
### 4.4.1 VOSET从二维推广到三维需要解决的问题

VOSET中重构相界面和计算符号距离函数都采用了几何方法，因此在二维中实施VOSET需要解决的是一个平面几何问题。

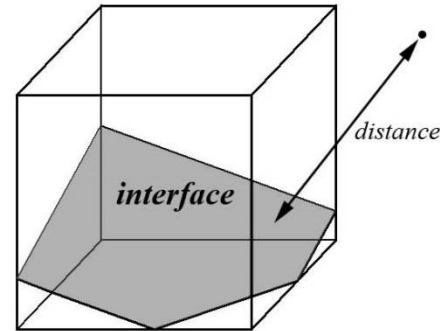
在三维坐标系中实施VOSET需要解决的是一个立体几何问题。因此，VOSET向三维推广的关键问题在于**如何解决更复杂的几何问题**。

从二维到三维要解决三个问题：

- (1) 如何推进三维体积函数；
- (2) 如何计算符号距离函数；
- (3) 如何重构三维相界面？



二维



三维

相界面的推进比较简单，三个方向分别做推进，不是讨论重点；

## (1) 计算点到相界面的最短距离

在二维中，通过解一个三角形就可以计算出一个点到相界的最短距离，同样的问题在三维中应该如何计算？

## (2) 相界面的描述与重构

二维问题中用线段两个端点的坐标就可以描述重构相界面，三维中的重构相界面应该如何描述？

## 4.4.2 VOSET从二维到三维的简单推广---沿用二维问题的方法

一种简单的推广方法就是完全沿用二维的方法，只是增加了一个维度。

### 1. 流体体积函数的推进 (同二维情形)

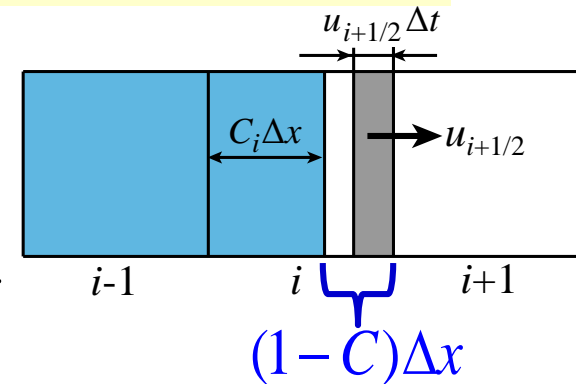
三维空间含相界面的一个控制容积在一个时间步长后体积函数的变化为：

$$(C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z =$$

$$F_{i-1/2,j,k}^n - F_{i+1/2,j,k}^n + F_{i,j-1/2,k}^n - F_{i,j+1/2,k}^n + F_{i,j,k-1/2}^n - F_{i,j,k+1/2}^n$$

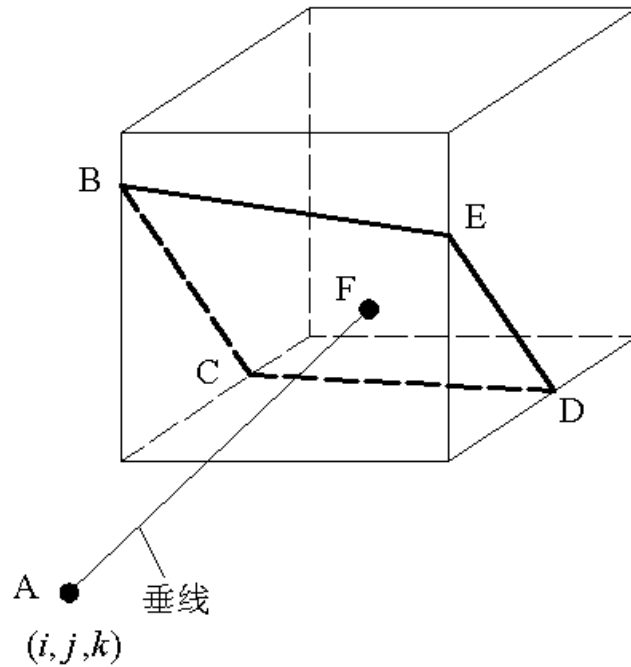
对于存在相界面的控制容积：

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} 0 & u_{i+1/2} \Delta t < (1-C) \Delta x \\ u_{i+1/2} \Delta t - (1-C) \Delta x & u_{i+1/2} \Delta t > (1-C) \Delta x \end{cases}$$

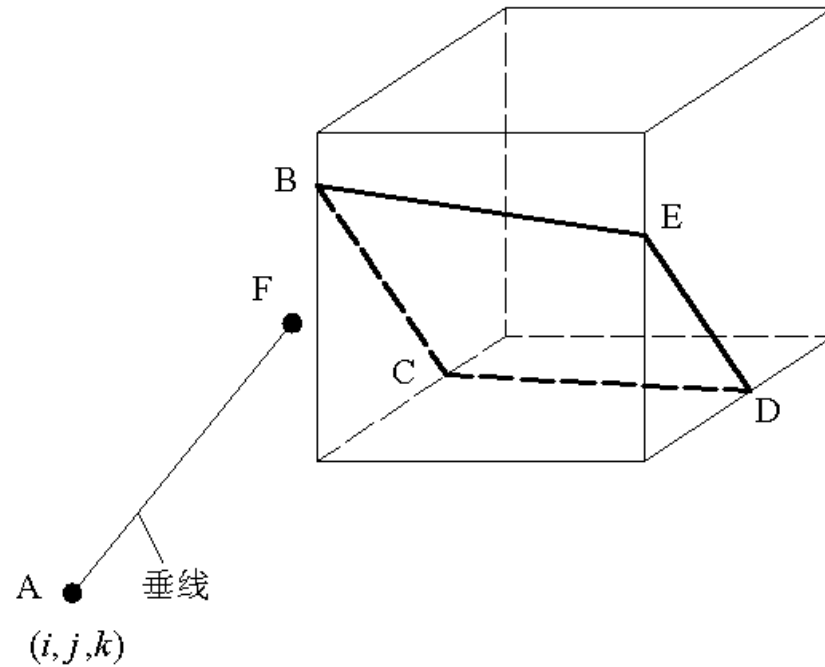


## 2. 符号距离函数的迭代计算 (基本同二维)

在节点 $(i,j,k)$ 的三个坐标方向取 $7 \times 7 \times 7$ 个控制容积，寻找该点到位于多个控制容积内相界面距离，并从中选出最短距离作为该点的符号函数。



F点在BCDE相界面面内

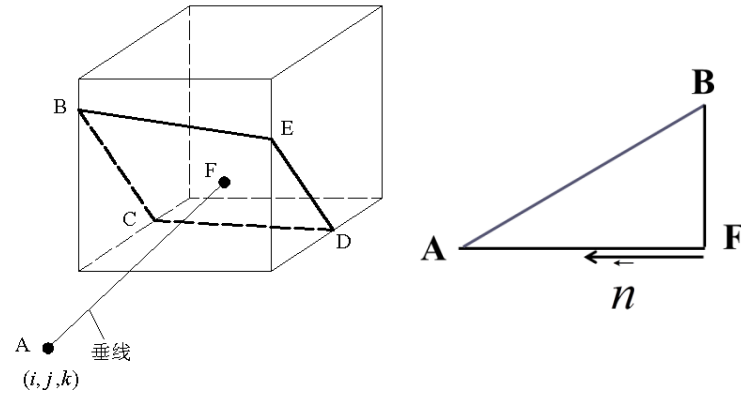


F点在BCDE相界面面外

为确定垂足F的坐标，首先需要计算垂线AF的距离：

$$AF = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

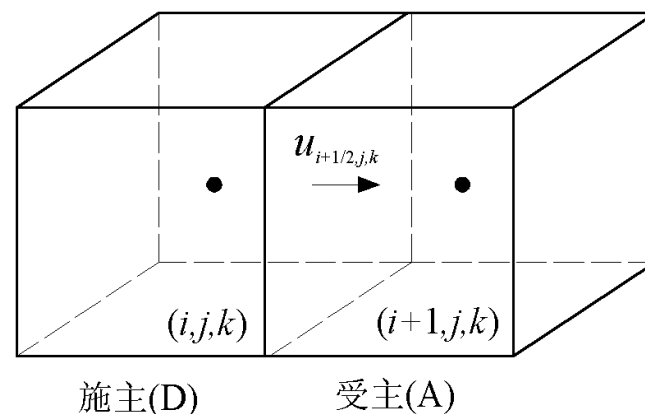
如果垂足F位于界面BCDE内，垂线AF就是节点A到界面BCDE的最小距离；如果垂足F位于界面BCDE外，首先需要分别计算节点A到界面各个边（线段BC，CD，DE，EB）的最小距离（计算方法如二维问题），然后比较这些最小距离，得出节点A到界面BCDE的最小距离d。



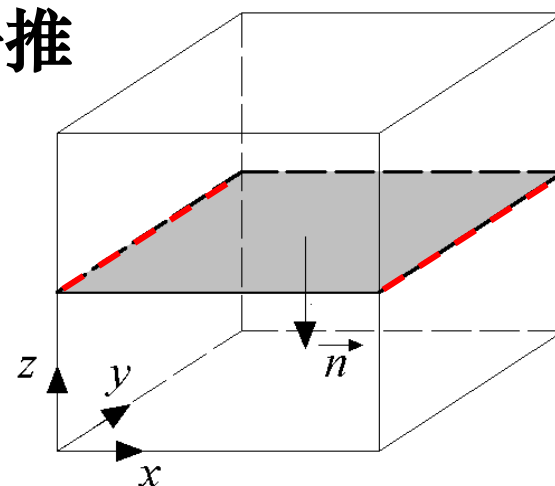
$$\phi_{i,j} = \begin{cases} -d & \text{if } C_{i,j} > 0.5 \\ 0 & \text{if } C_{i,j} = 0.5 \\ d & \text{if } C_{i,j} < 0.5 \end{cases}$$

### 3. PLIC界面重构 (二维简单推广)

当  $(i,j,k)$  控制容积内是：  
 $0 < C < 1$ ，则其内就存在界面  
 重构问题。



二维问题根据  $n_x, n_y$  的不同组合，  
 共有16种界面的情形。这种分析方法推  
 广到三维根据界面法线  $\vec{n}_{i,j,k} = \nabla C$

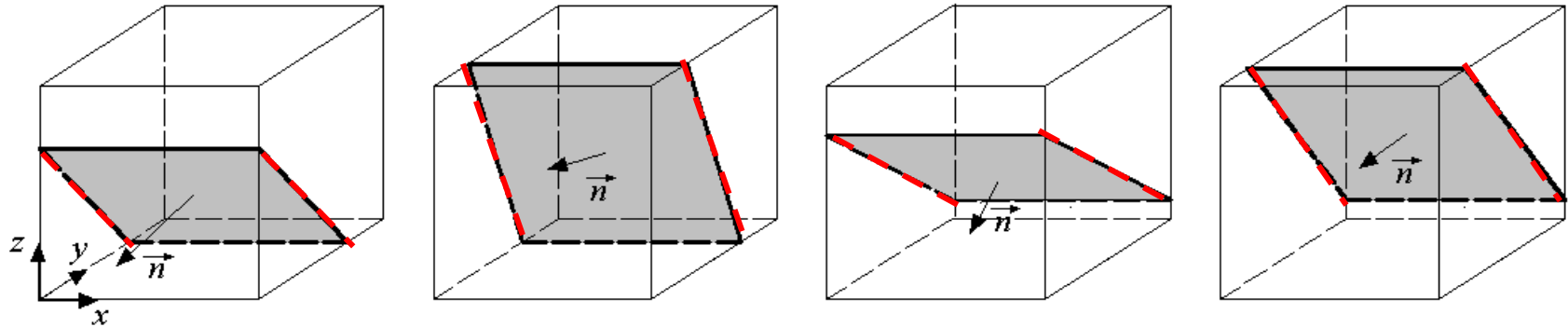


三个分量的不同组合存在三大类  
 (51种) 情况：

**第一种类型：**法线的三个方  
 向分量中  $n_{i,j,k}^x, n_{i,j,k}^y, n_{i,j,k}^z$   
 有两个分为0；

此图界面垂直于z轴，  
 作为垂直一个轴情况  
 的代表(3种)

## 第二种类型：法线的三个方向分量 $n_{i,j,k}^x, n_{i,j,k}^y, n_{i,j,k}^z$ 中有一个分为 0；

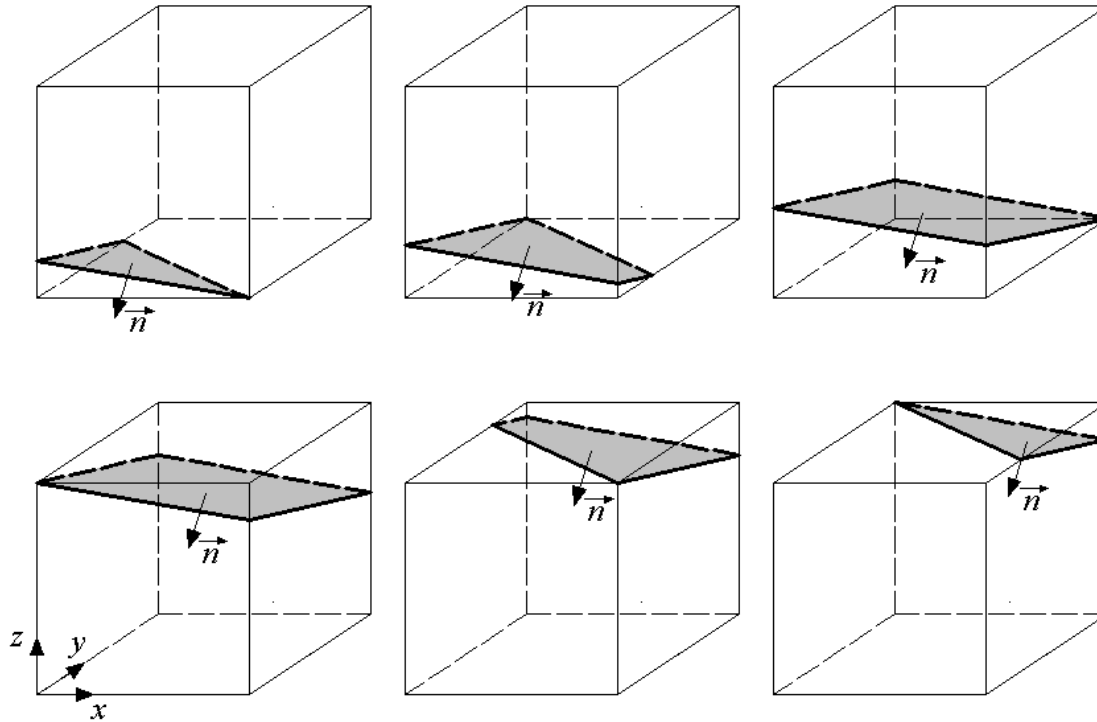


使界面法线垂直于  $x$  轴，界面两条边在平行于  $y$ - $z$  面内转动，其时该两边界(红色)始终平行，于是就有：

$$n_{i,j,k}^x = 0 \quad \text{可作为一个分量为 } 0 \text{ 的代表 (3X4=12)}$$

第三种类型a 法线三个方向分量  $n_{i,j,k}^x, n_{i,j,k}^y, n_{i,j,k}^z$  均不为0，

# x,y 轴上法线分量之和小于在 z 轴上的分量



## 第三种类型a

法线几乎平行z-轴，

有6种界面形状

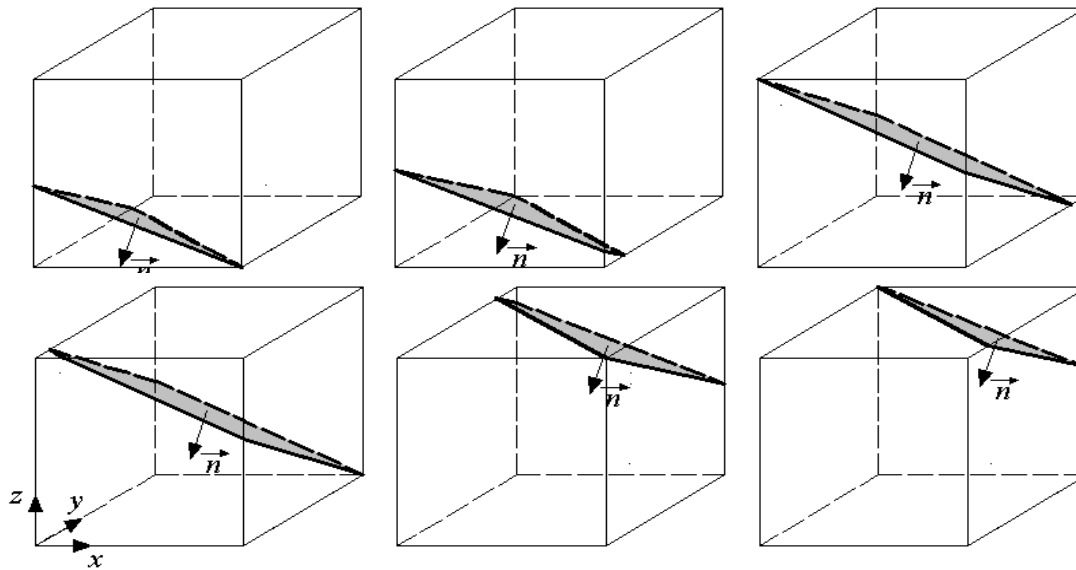
此图可作为法线几乎平行于一个轴的代表 (3X6=18)。

界面法线可在三维方向内转动，但在x,y 轴上法线分量之和小于在z轴上的分量（法线接近与z轴平行）：

$$|n_{i,j,k}^x| + |n_{i,j,k}^y| \leq |n_{i,j,k}^z|$$



**第三种类型b** 法线三个方向分量  $n_{i,j,k}^x, n_{i,j,k}^y, n_{i,j,k}^z$  均不为0,  
x,y 轴上法线分量之和大于在 z 轴上的分量



**第三种类型b**  
**法线与z-轴夹角较大**  
**6种界面形状**  
此图作为与一个轴夹角较大情形的代表  
(3X6=18)。

界面法线可在三维方向内转动，但在x,y 轴上法线分量之和大于在z轴上的分量，法线接近于垂直z 轴：

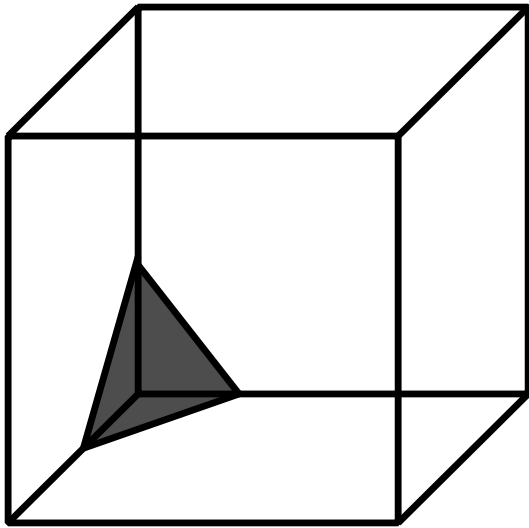
$$|n_{i,j,k}^x| + |n_{i,j,k}^y| > |n_{i,j,k}^z|$$

**简单的推广就需按照上述界面的形状做重构处理！**

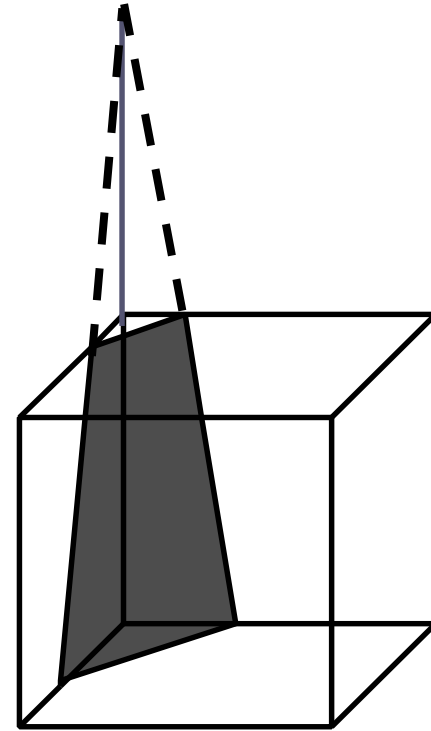
共需处理51种情况：18+18+12+3=51！

## 4.4.3 VOSET从二维到三维的智慧推广---利用体积函数与界面位置之间的内在联系重构界面

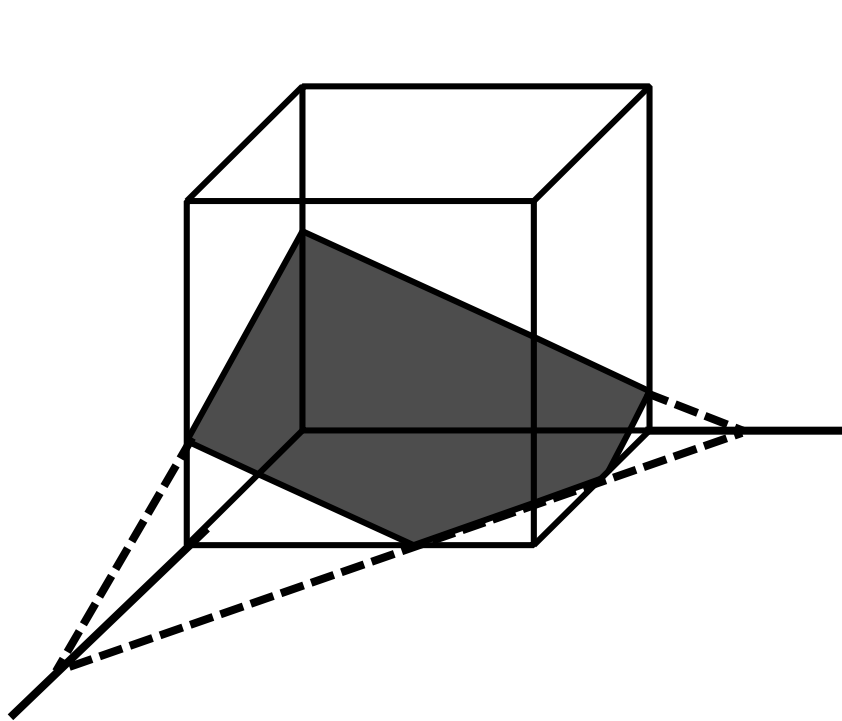
在二维中，界面与控制容积的二条边相交；在三维中，多边形的界面有什么对应的特点呢？



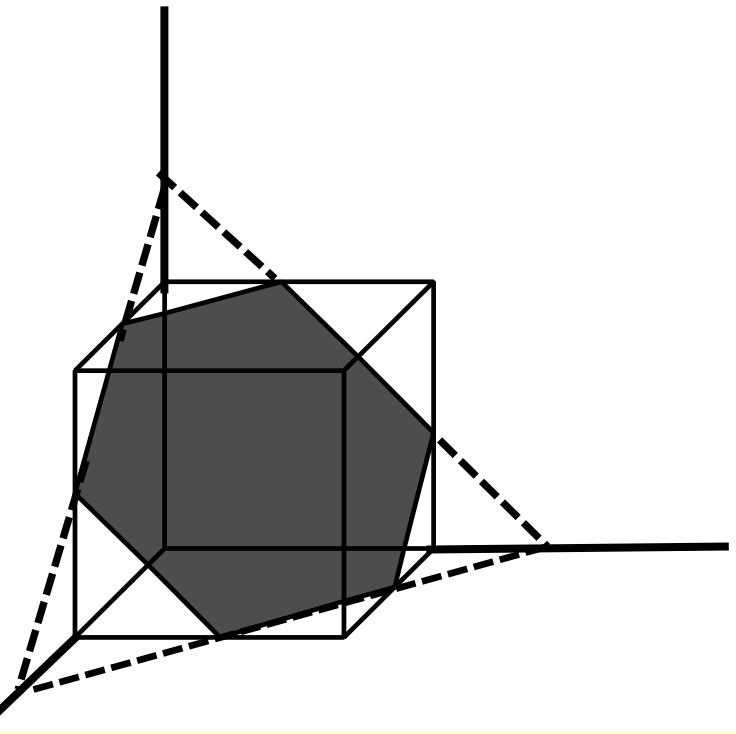
(1) 最简单情形：只要三条边上交点确定，界面位置就定了；



(2) 复杂情形1：界面拓展为四边形，只要拓展界面与控制容积一条延长边交点确定，界面位置就定；



(3) 复杂情形2：相界面拓展成五边形，也和控制容积的三条边相交，交点确定了相界面的位置；



(3) 复杂情形3：相界面拓展成六边形，也和控制容积三条边相交，交点确定了相界面的位置。

**三维相界面重构的关键是确定相界面（拓展面）与三个坐标轴的交点位置（由二维的2点变为3维的3点）！**

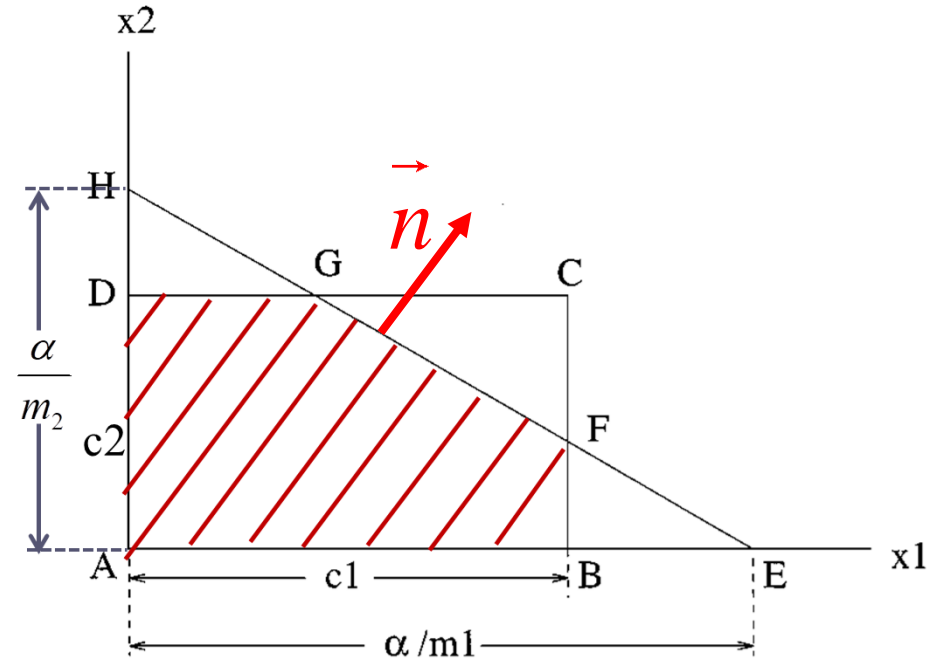
# 1. 从三维分析回视二维问题界面直线与坐标轴交点的确定

在单元ABCD中，把相界面GF延长为直线HE，则该直线可表示为：

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \alpha$$

$m_1, m_2$  表示直线HE的单位法向矢量的分量；显然

$$\overline{AE} = \alpha / m_1; \overline{AH} = \alpha / m_2$$



交点的位置E, H 取决于Alfa!

Alfa 与流体体积函数有关：

流体体积函数的面积ABFGD=

三角形AEH的面积-

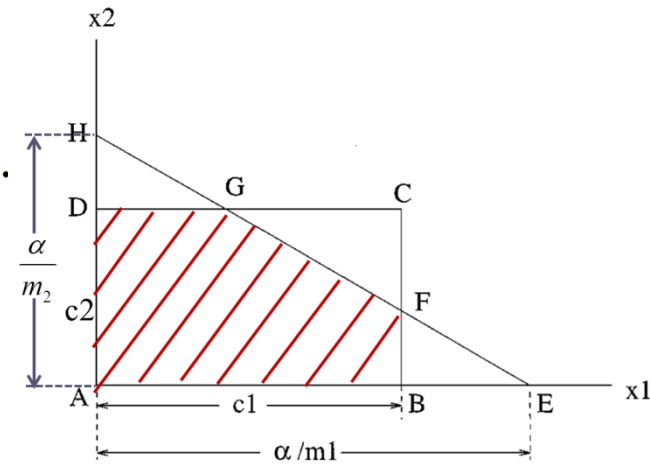
(三角形BEF的面积+三角形DGH的面积)

$$\text{三角形AEH的面积} = \alpha^2 / 2m_1m_2$$

## 三角形BEF及DGH与AEH相似:

$$\frac{\text{Area of } BEF}{\text{Area of } AEH} = \left( \frac{\alpha/m_1 - c_1}{\alpha/m_1} \right)^2 = \left( \frac{\alpha - m_1 c_1}{\alpha} \right)^2$$

$$\frac{\text{Area of } DGH}{\text{Area of } AEH} = \left( \frac{\alpha/m_2 - c_2}{\alpha/m_2} \right)^2 = \left( \frac{\alpha - c_2 m_2}{\alpha} \right)^2$$



将以上结果代入到下式:

流体体积函数的面积ABFGD= 三角形AEH的面积-

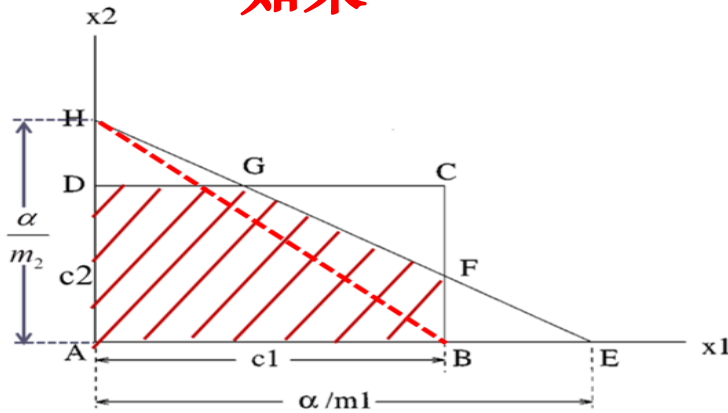
(三角形BEF的面积+三角形DGH的面积)

$$\text{Area} = \frac{\alpha^2}{2m_1 m_2} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha - m_1 c_1}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{\alpha - m_2 c_2}{\alpha} \right)^2 \right]$$

?

此式适用于所示图形, 是否能代表各种可能情形?

如果

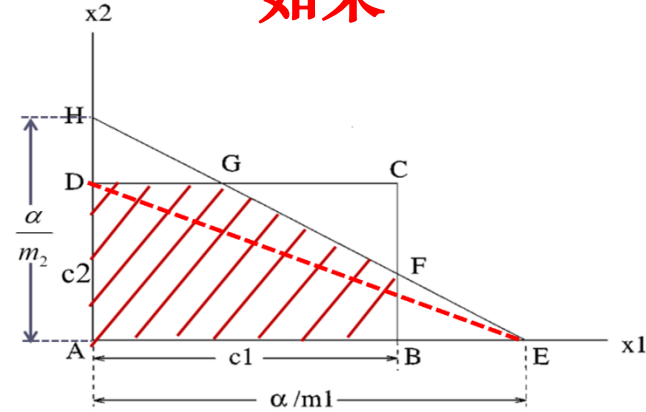


$$\alpha/m_1 \leq c_1, \text{ i.e., } \alpha - m_1 c_1 \leq 0$$

E点在AB之内。

不用减FEB

如果



$$\alpha/m_2 \leq c_2, \text{ i.e., } \alpha - m_2 c_2 \leq 0$$

H点在AD之内。

不用减HDG

$$\text{Area} = \frac{\alpha^2}{2m_1 m_2} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha - m_1 c_1}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{\alpha - m_2 c_2}{\alpha} \right)^2 \right]$$

$H(x)$  为Heaviside阶梯函数，其定义为：

if  $x \leq 0$ ,  $H(x) = 0$ ;

if  $x > 0$ ,  $H(x) = 1$

Area 可由流体体积函数决定，已知面积后可由上式决定Alfa!

## 2. 三维问题界面与坐标轴交点的确定

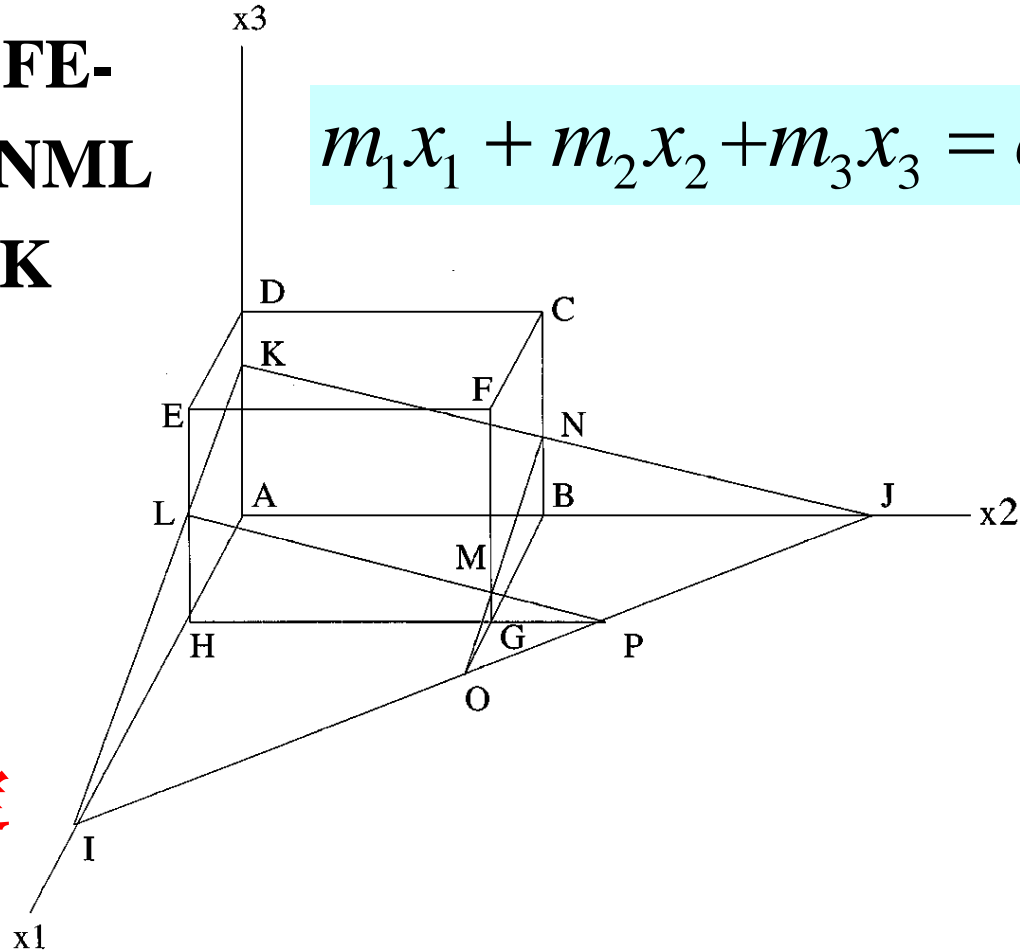
设控制容积为DCFE-  
 ABGH; 界面为KNML  
 需要确定交点I,J,K

$$\overline{AI} = \alpha / m_1 ;$$

$$\overline{AJ} = \alpha / m_2 ;$$

$$\overline{AK} = \alpha / m_3$$

关键在如何确定  
**Alfa!**



$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = \alpha$$

设 $C_1, C_2, C_3$ 为三维控制容积三条边的长度。

定义  $\alpha_{\max} = m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3$

体积函数与Alfa之间的关系为（Cube-cutting 函数）：

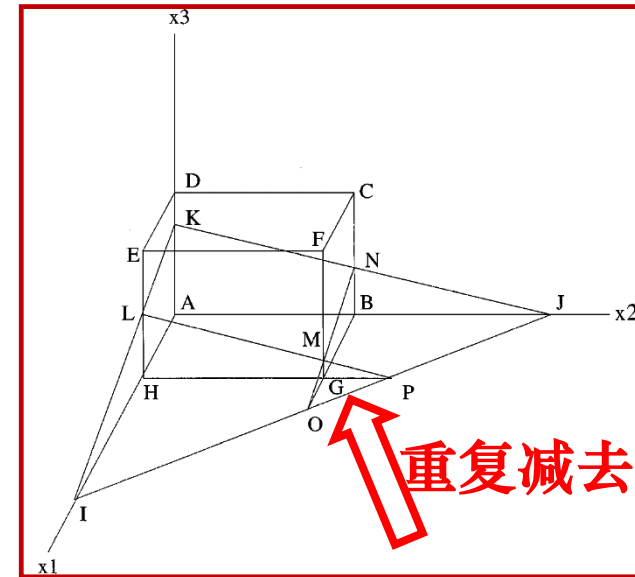
$$Volume(\alpha) = \frac{1}{6m_1m_2m_3} \left[ \alpha^3 - \sum_{j=1}^3 H(\alpha - m_j c_j) (\alpha - m_j c_j)^3 + \sum_{j=1}^3 H(\alpha - \alpha_{\max} + m_j c_j) (\alpha - \alpha_{\max} + m_j c_j)^3 \right]$$

(1)                      (2)                      (3)

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

- (1) 项代表整个三角形四面体的体积；
- (2) 项代表需要减去的域外三角形的体积；
- (3) 项代表需要补回来的域内体积。

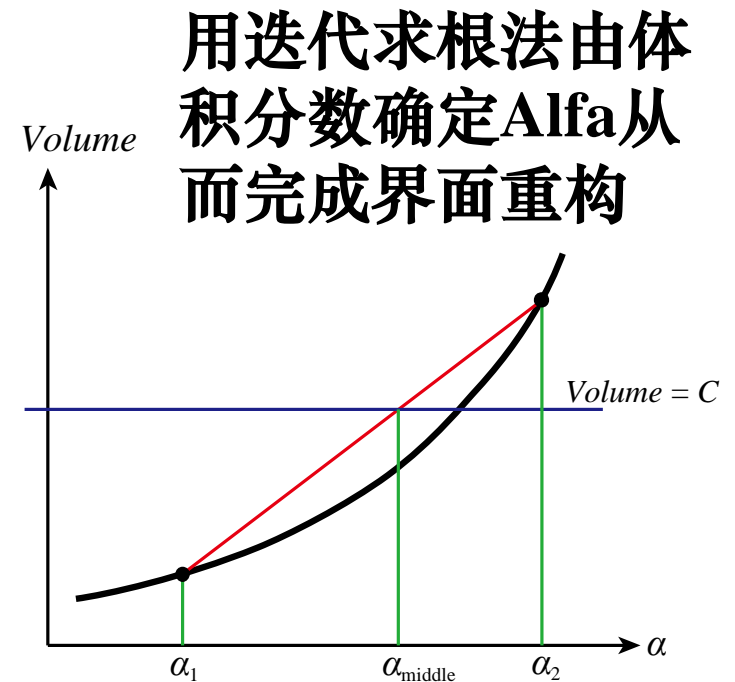
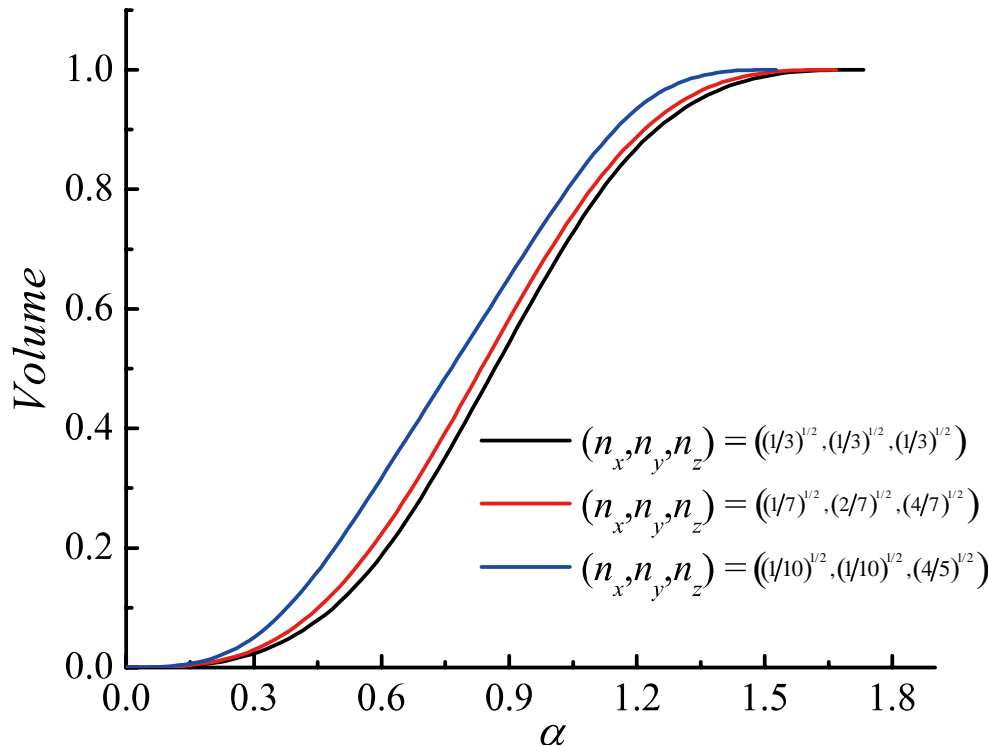
界面重构的关键：**根据给定的体积函数 *Volume* 确定  $\alpha$**



确定Alfa以后，相界面与三个坐标的交点就确定，相界面位置就唯一地确定下来了。**这种方法大大节省了重构工作量！**



# Cube-cutting函数的特点：光滑、单调增



任意一组三个分量的组合可以得出一条唯一的体积函数与Alfa的曲线；由体积函数确定Alfa后，就完成了界面的重构

Kong Lin, Zhao-Hui Li, Dong-Liang Sun, Ya-Ling He, Wen-Quan Tao , A three-dimensional volume of fluid & level set (VOSET) method for incompressible two-phase flow, Computers & Fluids, 2015,118:293-304

推荐阅读(14)

## 4.4.4 三维VOSET应用例子

### 1. 柱形坝溃塌问题

#### Conditions:

$$\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3 ; \rho_g = 1.25 \text{ kg/m}^3$$

$$\eta_l = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s} ; \eta_g = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

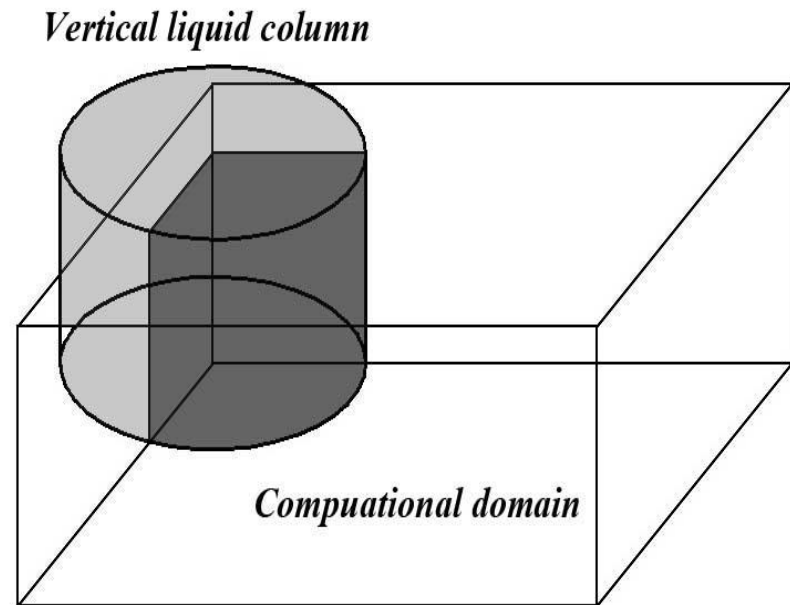
Coefficient of surface tension=  
 0.072N/m

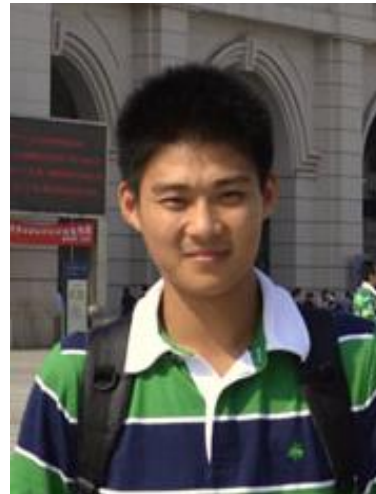
$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Radius and height  $L=2.25 \text{ in}$

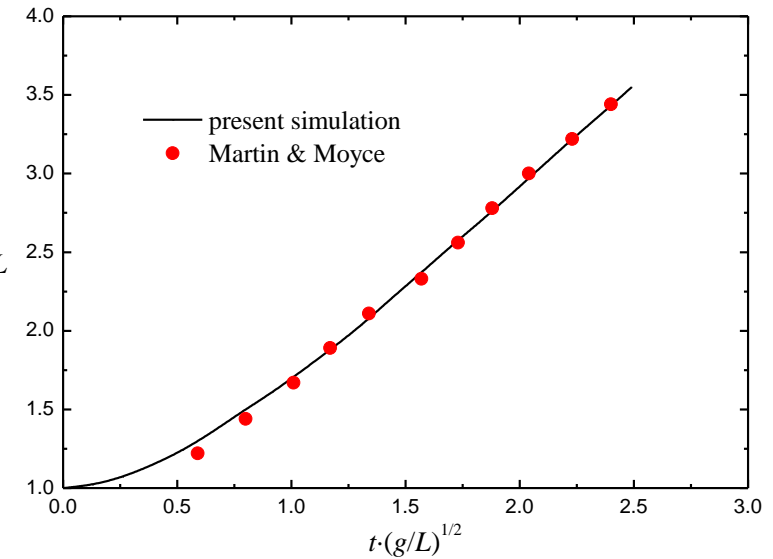
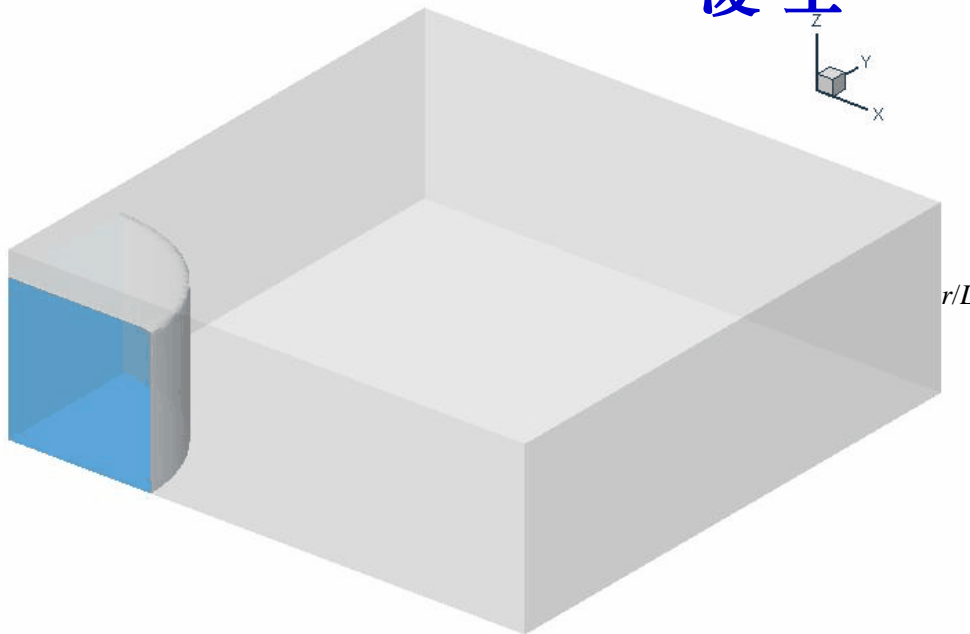
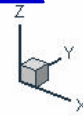
Domain:  $3.6L \times 3.6L \times 1.2L$

Grid:  $90 \times 90 \times 30$





凌空



Evolution process of interface

Base radius vs. time

## 2. 微通道内的核态沸腾

### Conditions:

Channel length:  $1000 \mu$  Channel width and height:  $200 \mu$

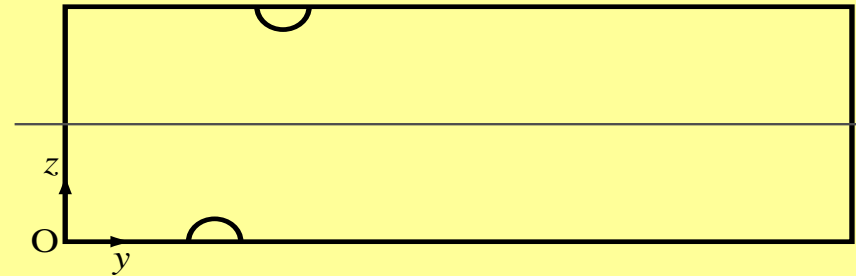
Water; Contact angle: 40 degrees;  $u_0 = 0.146 \text{ m/s}$ ;  $T_w - T_{\text{sat}} = 5\text{K}$

Initial position of bubbles

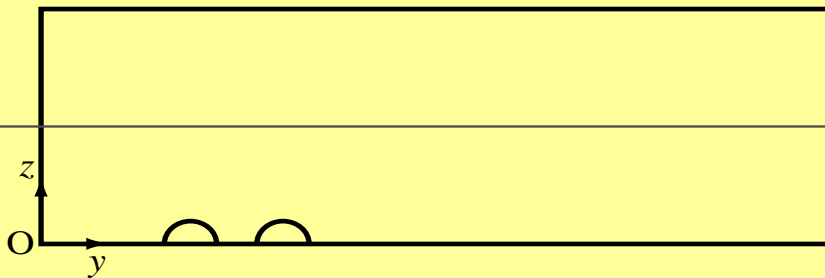
Case 1



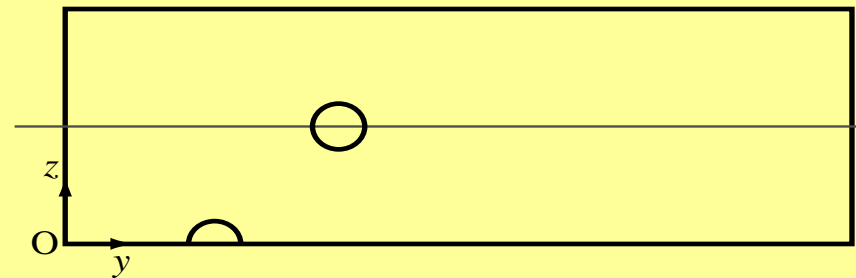
Case 2



Case 3

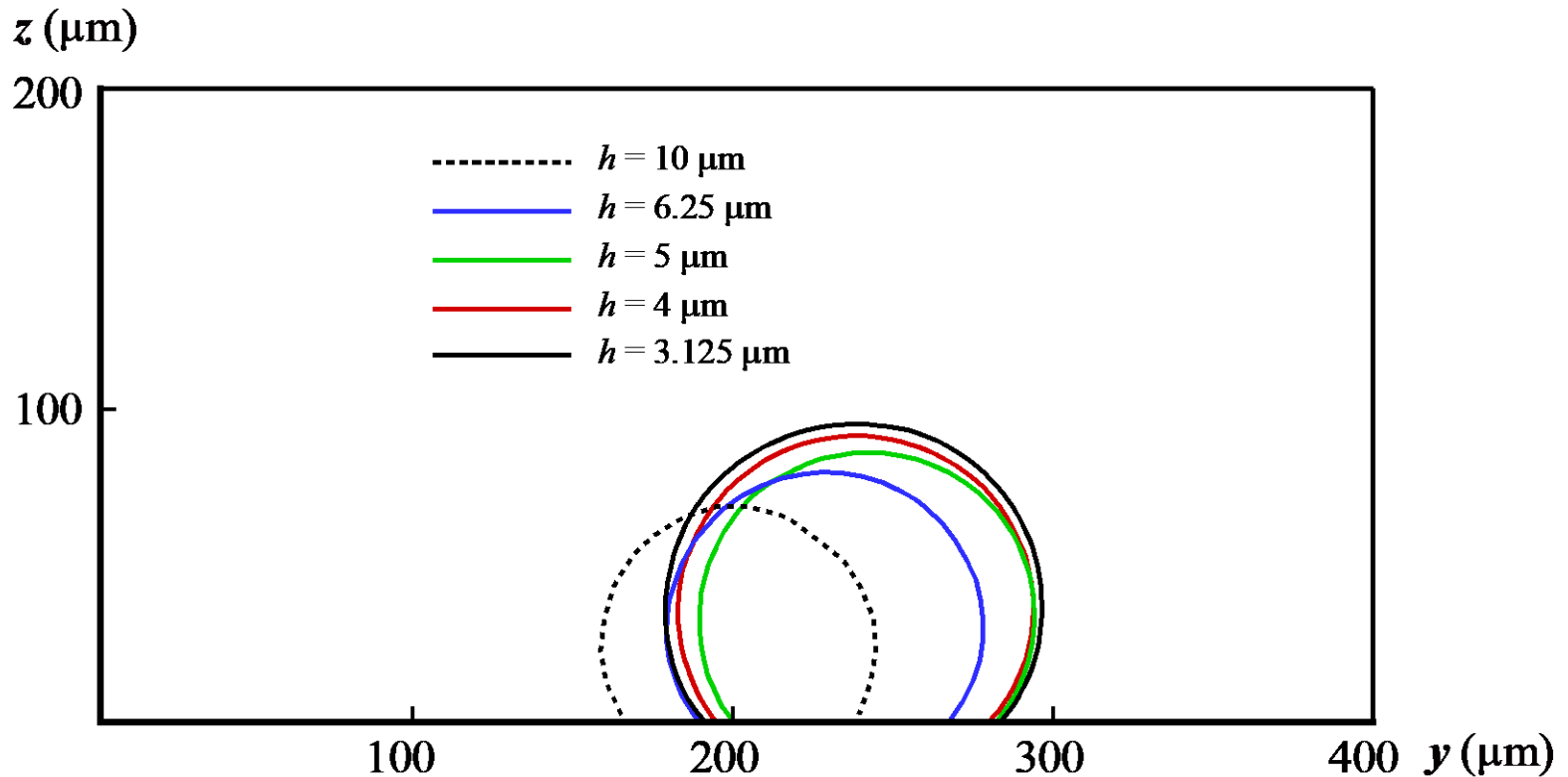


Case 4



# 1) Grid-independence test

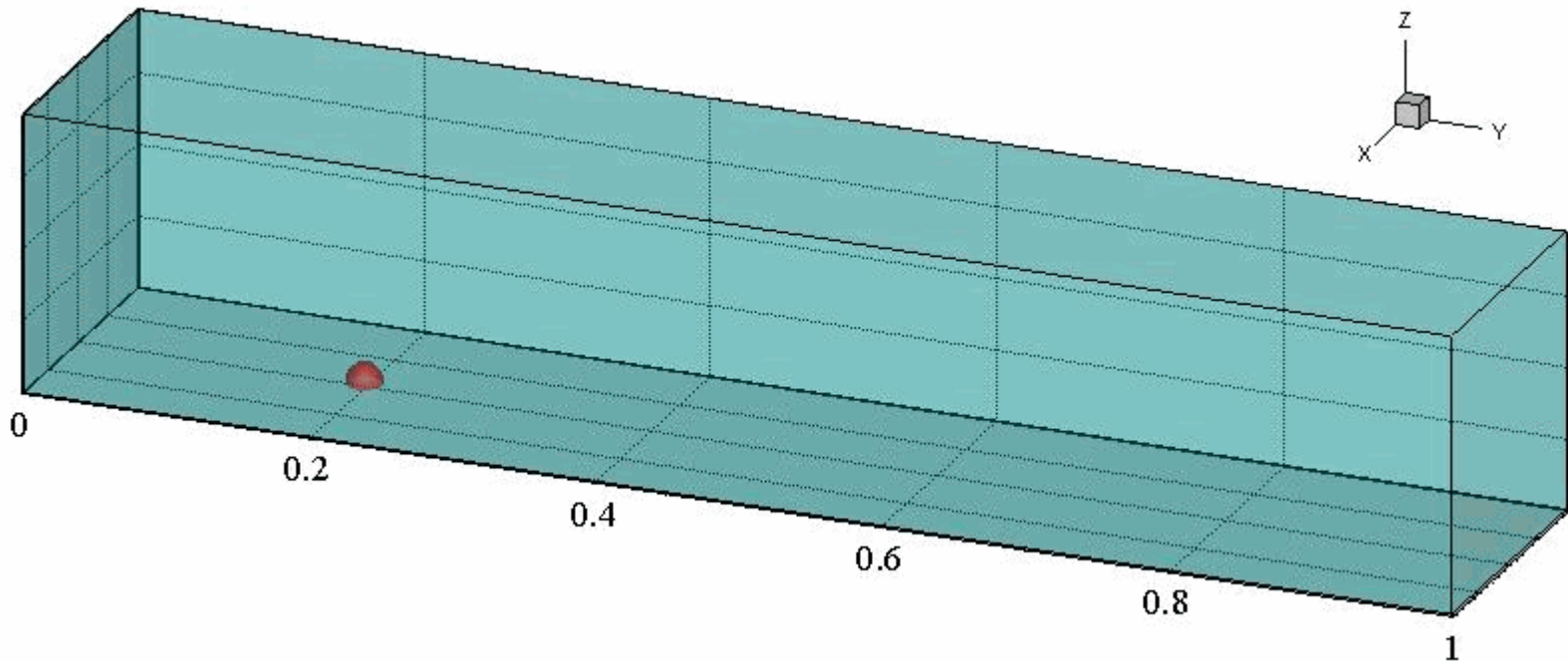
Initial condition: Steady solution of single phase flow



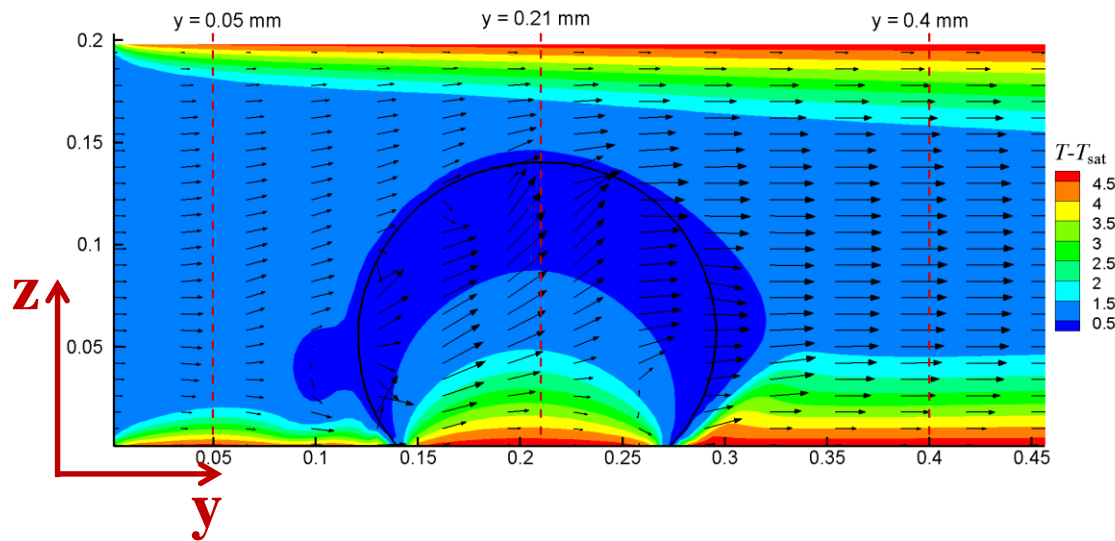
Single bubble, interface at 0.2 ms .

## 2) Numerical results of bubble evolution

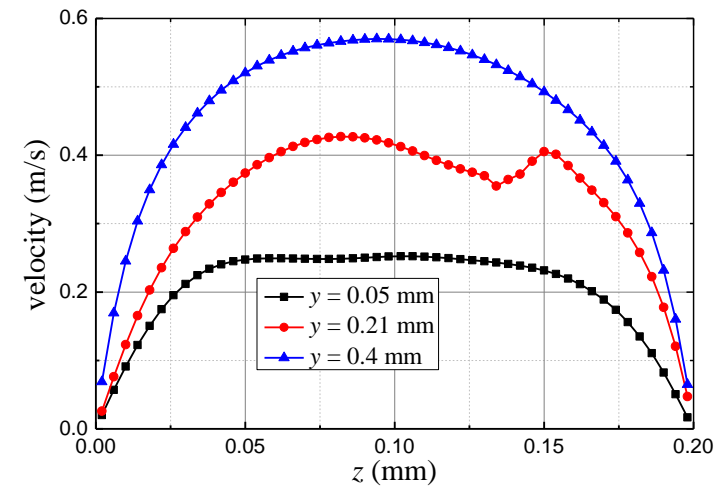
### (1) Case 1



# Effects of bubble on flow field and temperature

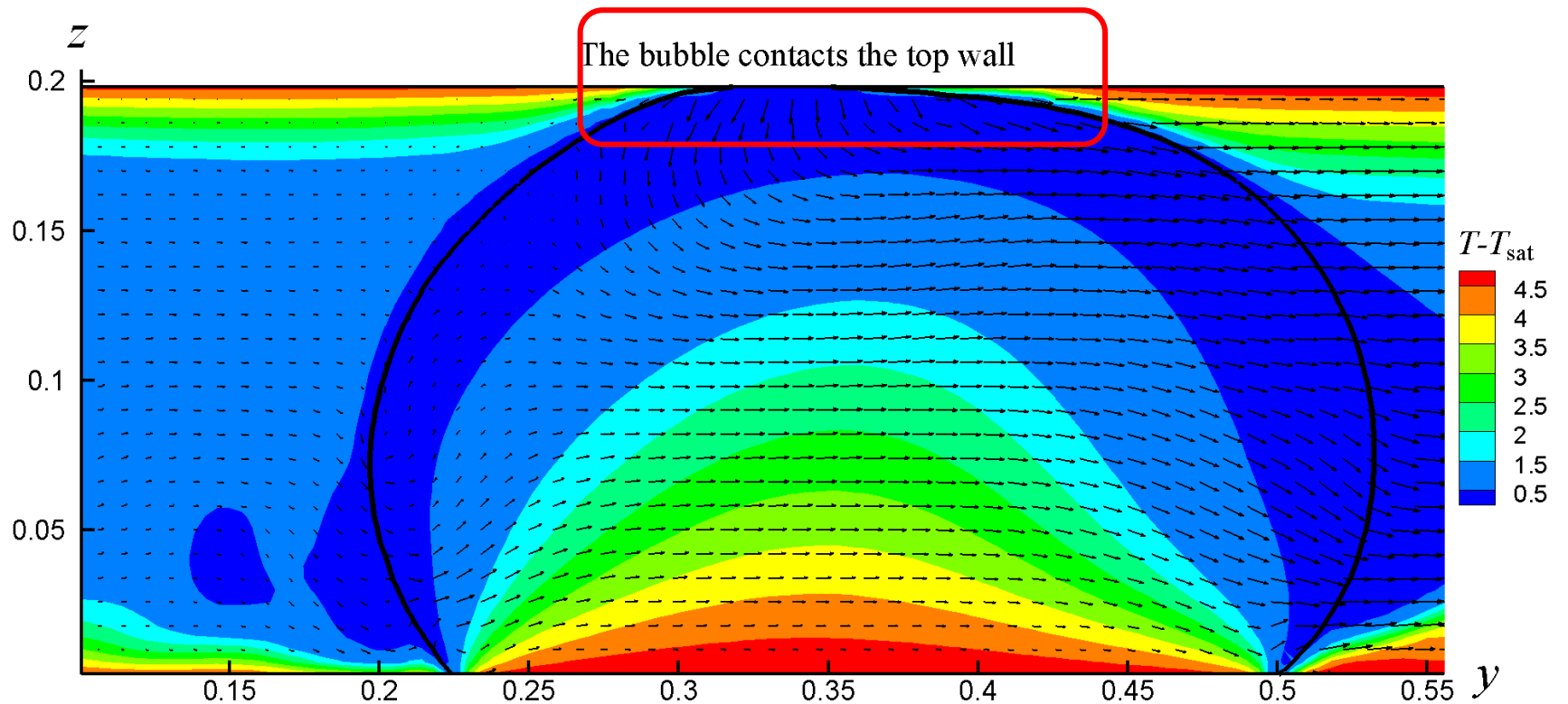


Temperature and velocity at 0.5 ms



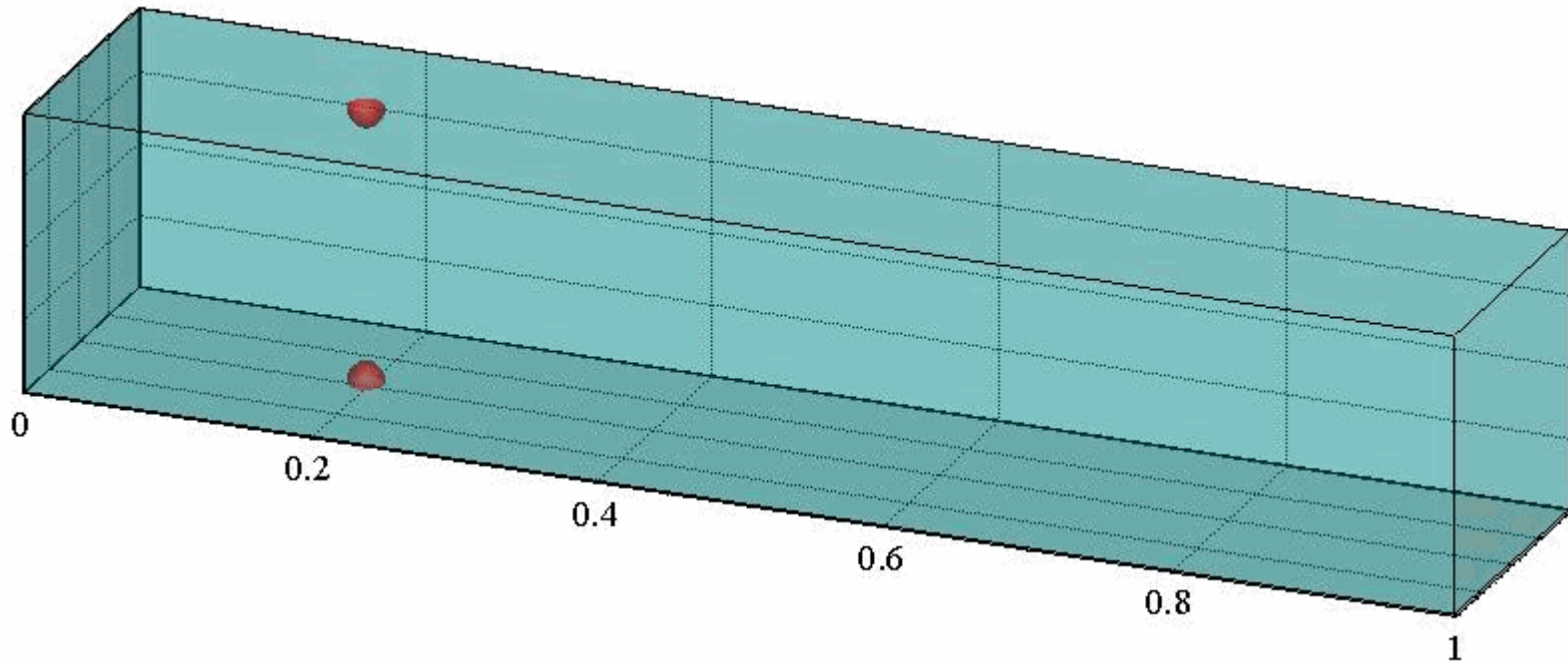
Axial velocity at three positions

# Temperature and velocity at 0.85 ms

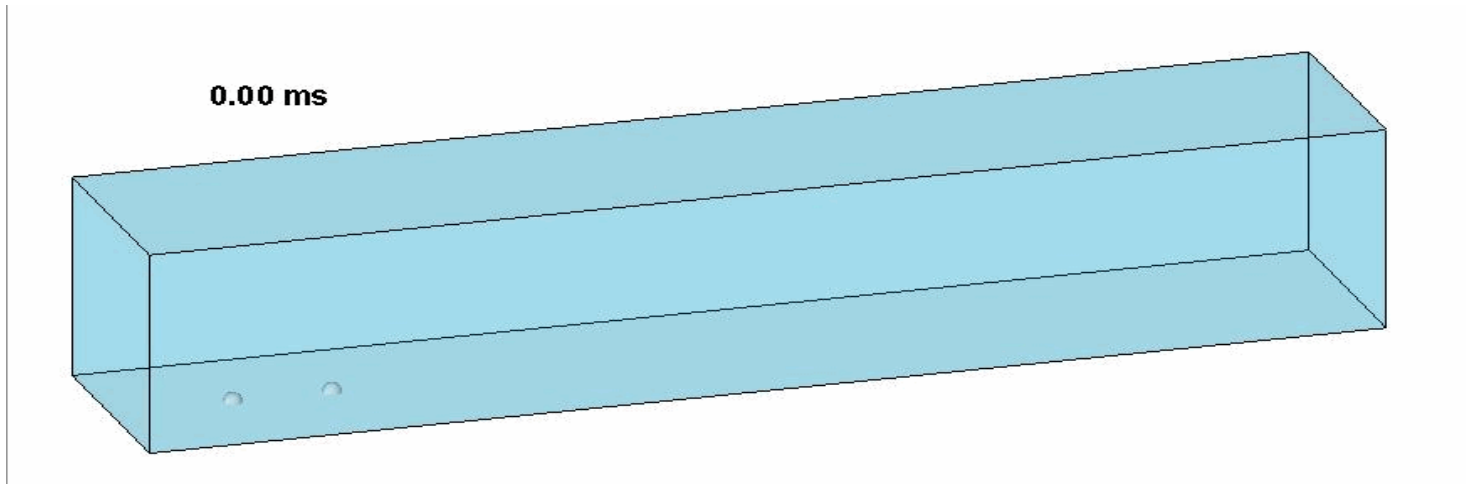




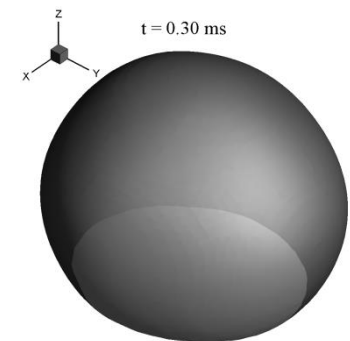
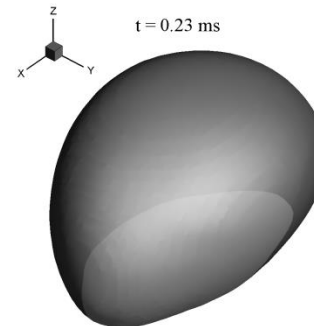
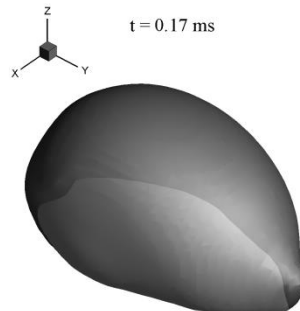
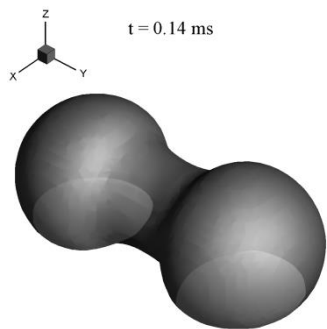
## Case 2



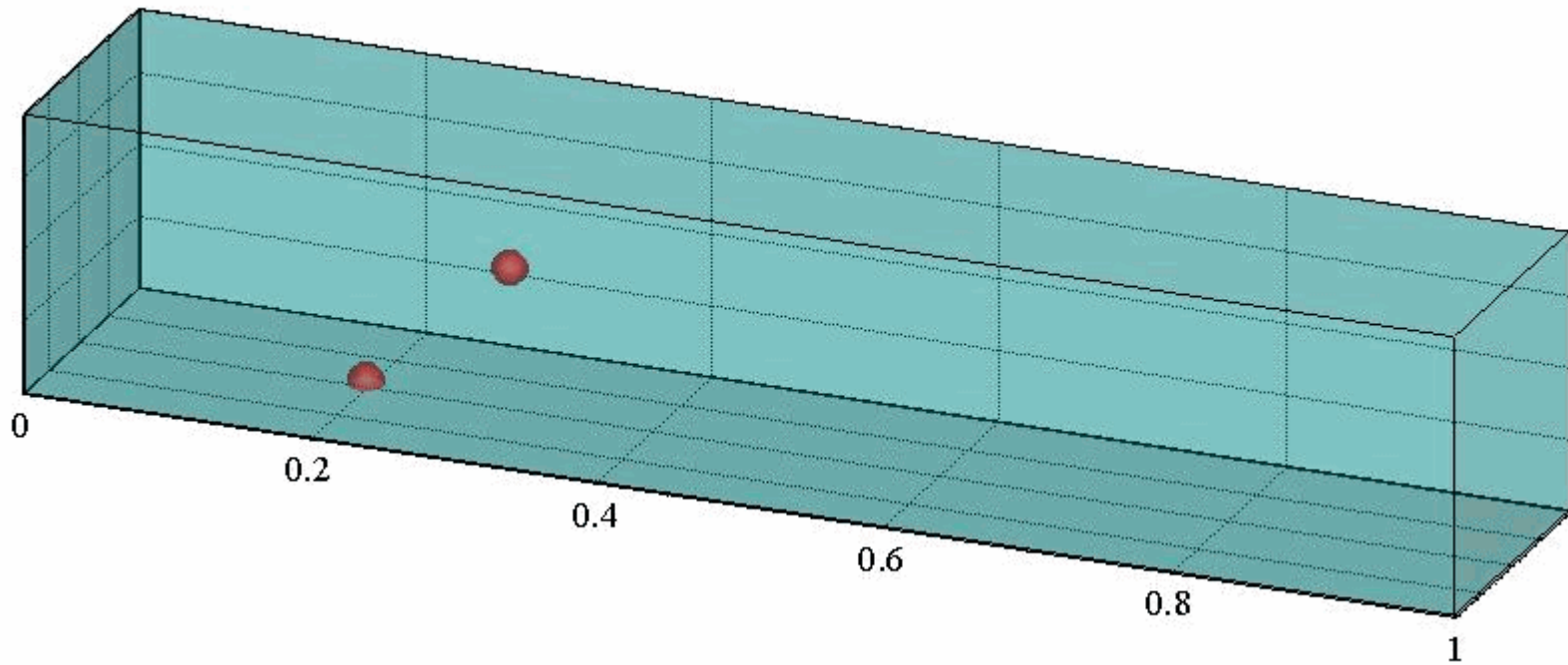
# Case 3



## Merging process of bubbles

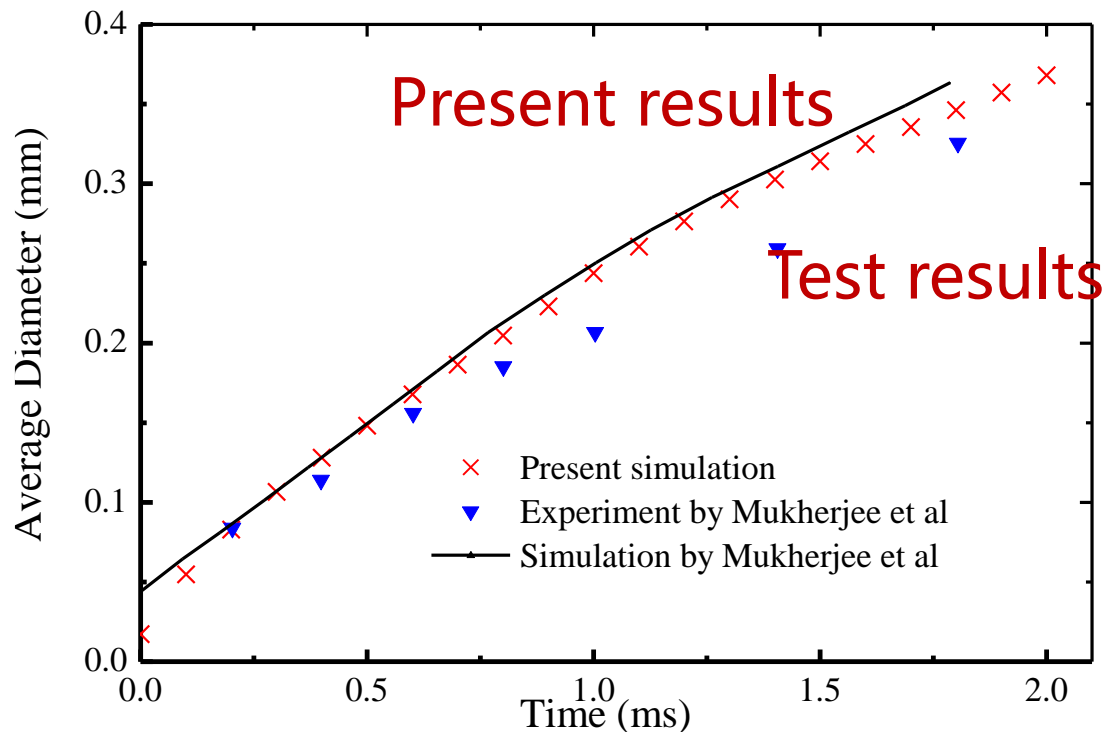


# Case 4

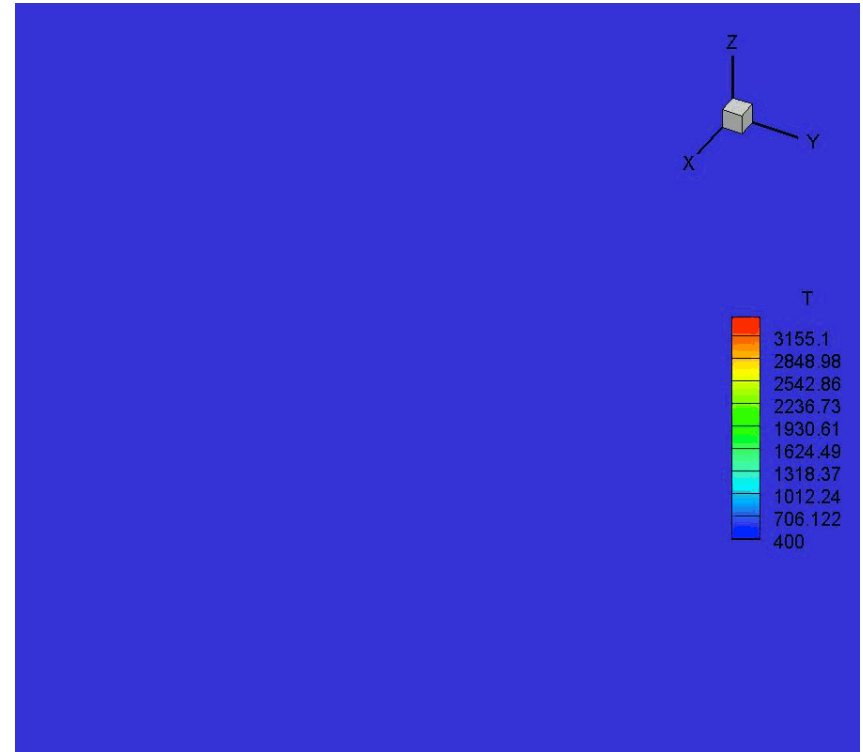
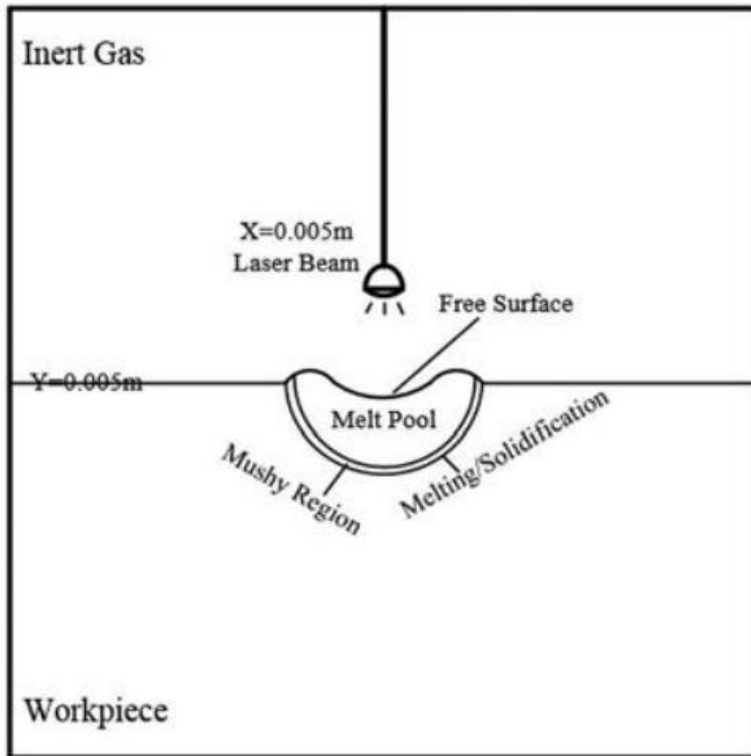


### 3) Comparison with test results

- (a) 2K liquid supper heat for initial and inlet fluid;
- (b) Wall supper heat : 2.1 K;
- (c) Contact angle:  $30^\circ$ ;
- (d) Bottom wall-adiabatic; Width of channel:  $229 \mu\text{m}$



### 3. 激光作用下的金属熔池模拟



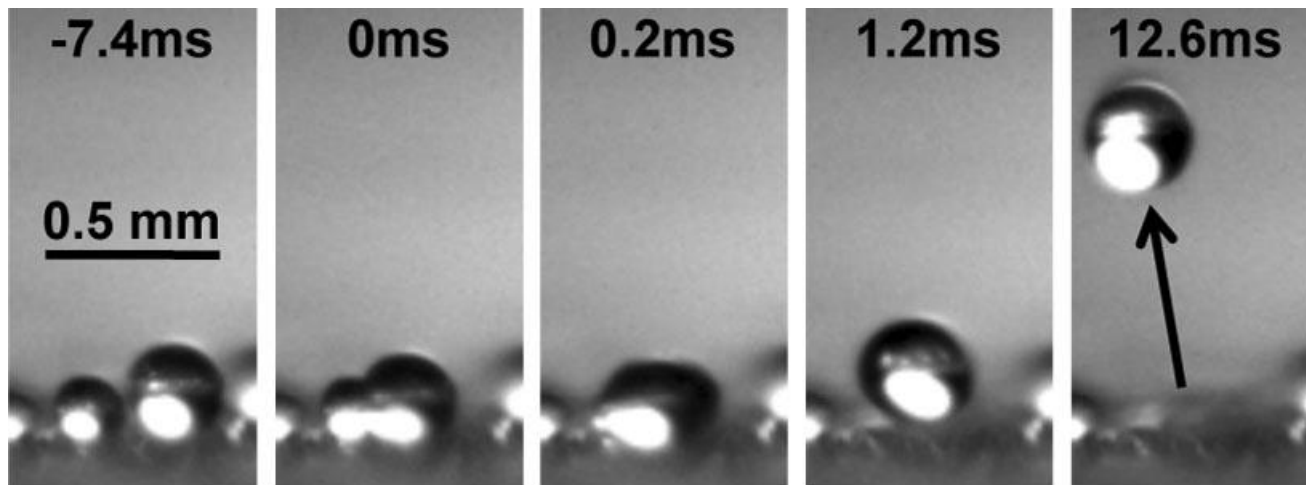
Q. Bian, R. Dai, X Tang, Q Liu, Q Wang, M Zeng, Investigation on the effect of the thermal dynamic, evaporation, and alternative material properties in a laser melt pool with a developed 2D model based on the VOSET method, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 2017, vol. 71: 1104-1122

推荐阅读(15)

## 4. 合并引起的液滴弹跳

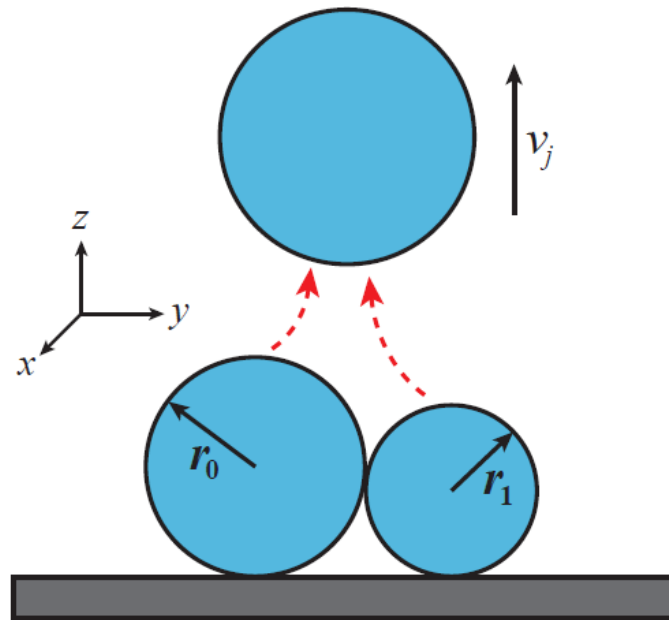
### 1) Physical phenomenon

When two micro-scale water drops coalesce on a superhydrophobic surface, the merged drop will jump spontaneously without any external force.



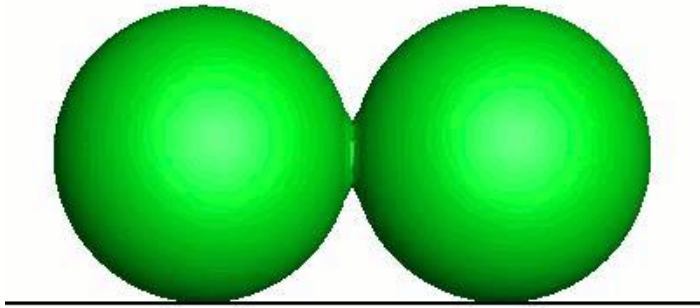
J. B. Boreyko and C. H. Chen, Self-propelled dropwise condensate on superhydrophobic surfaces, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, no. 184501, 2009.

3D VOSET approach was used to simulate the processes of coalescence and jumping of **symmetric** ( $r_0 = r_1$ ) coalescence and **asymmetric** ( $r_0 \neq r_1$ ) coalescence.

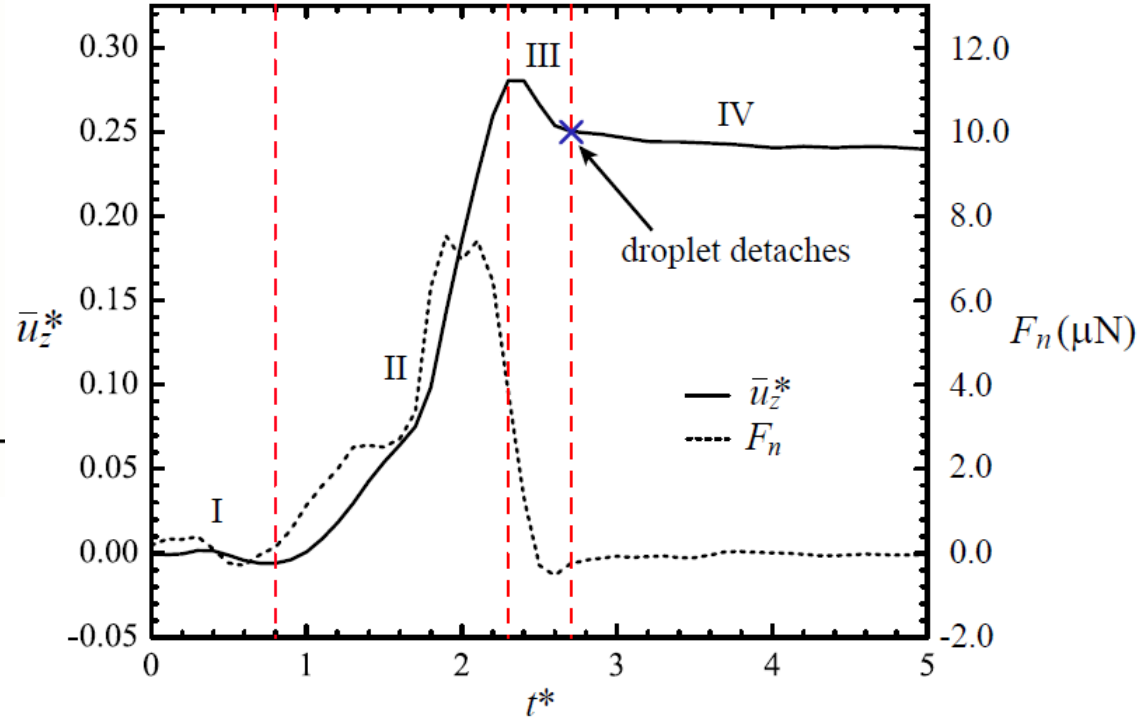


Contact angle of  $180^\circ$ ; Properties of liquid water at  $100^\circ\text{C}$ ;

## 2) Symmetric coalescence



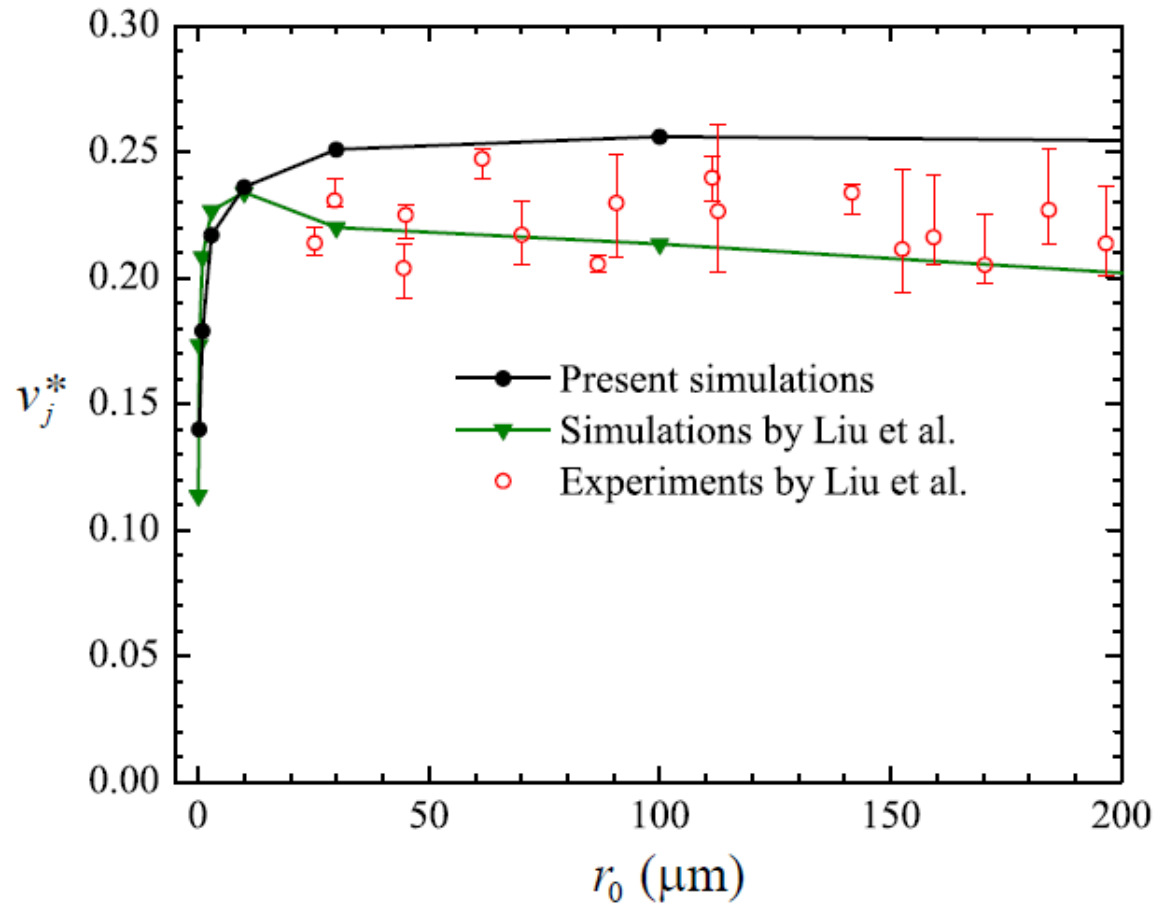
$$r_1 = r_0, v_j^* = 0.251$$



Lin K. et al, Paper to be submitted

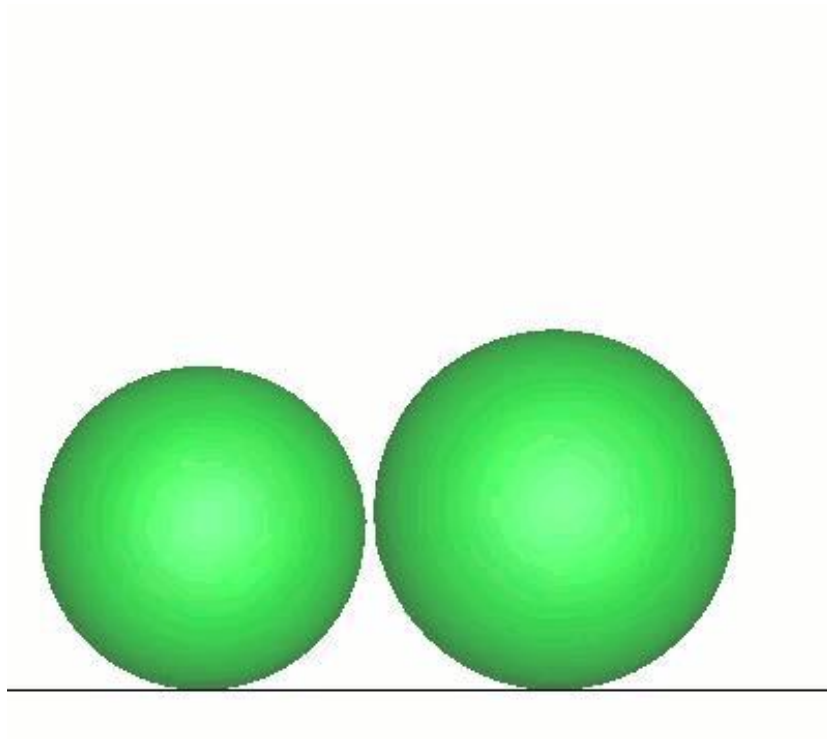


# Dimensionless jumping velocity at varying drop sizes

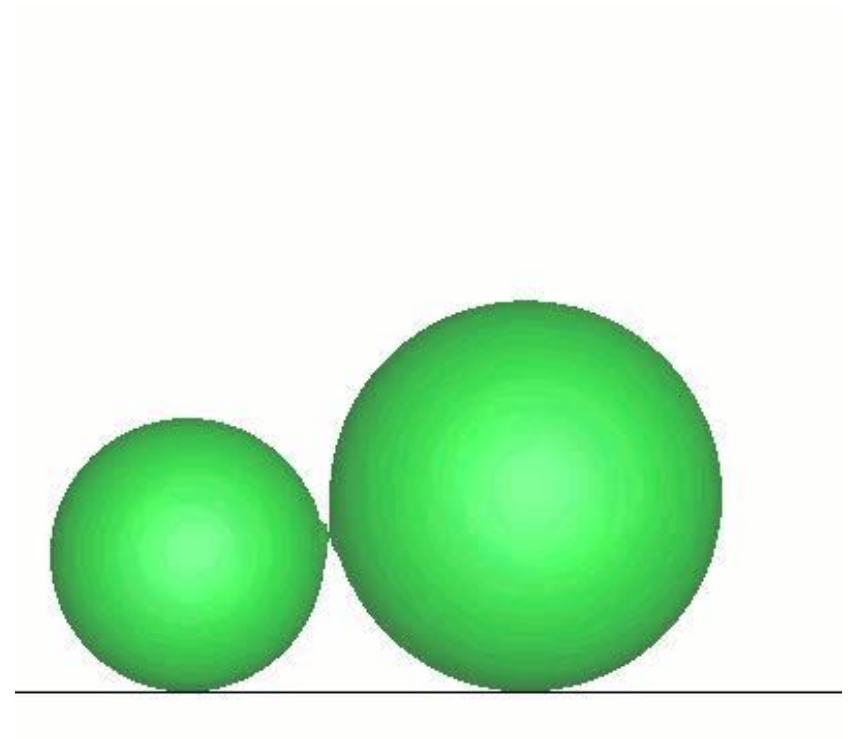


F. Liu, G. Ghigliotti, J. J. Feng, and C. H. Chen, "Numerical simulations of self-propelled jumping upon drop coalescence on non-wetting surfaces," *J. Fluid Mech.*, vol. 752, pp. 39-65, 2014.

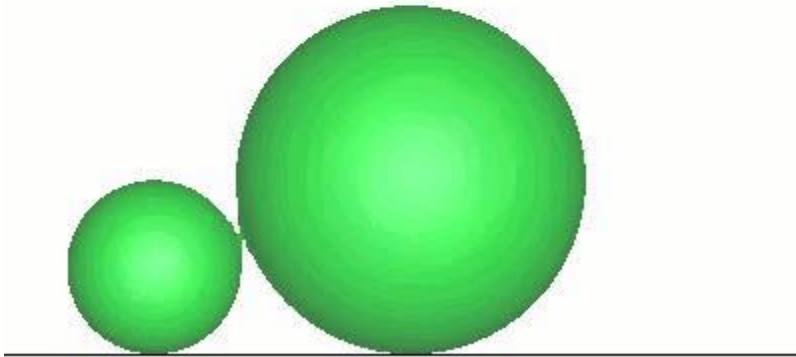
### 3) Asymmetric coalescence



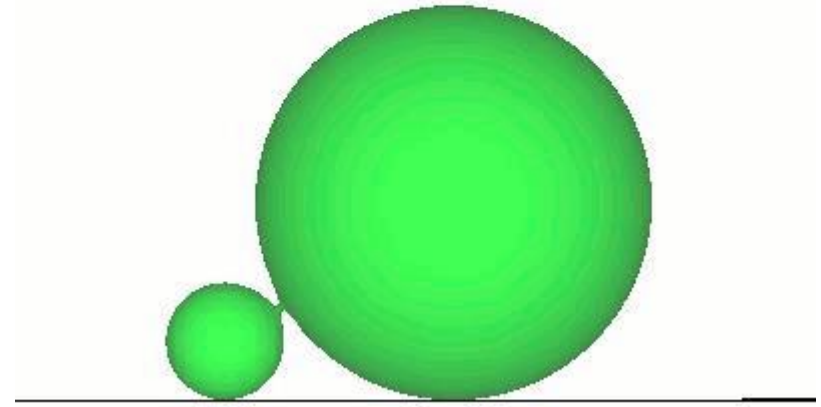
$$r_1/r_0 = 0.9$$
$$v_j^* = 0.241$$



$$r_1/r_0 = 0.7$$
$$v_j^* = 0.148$$



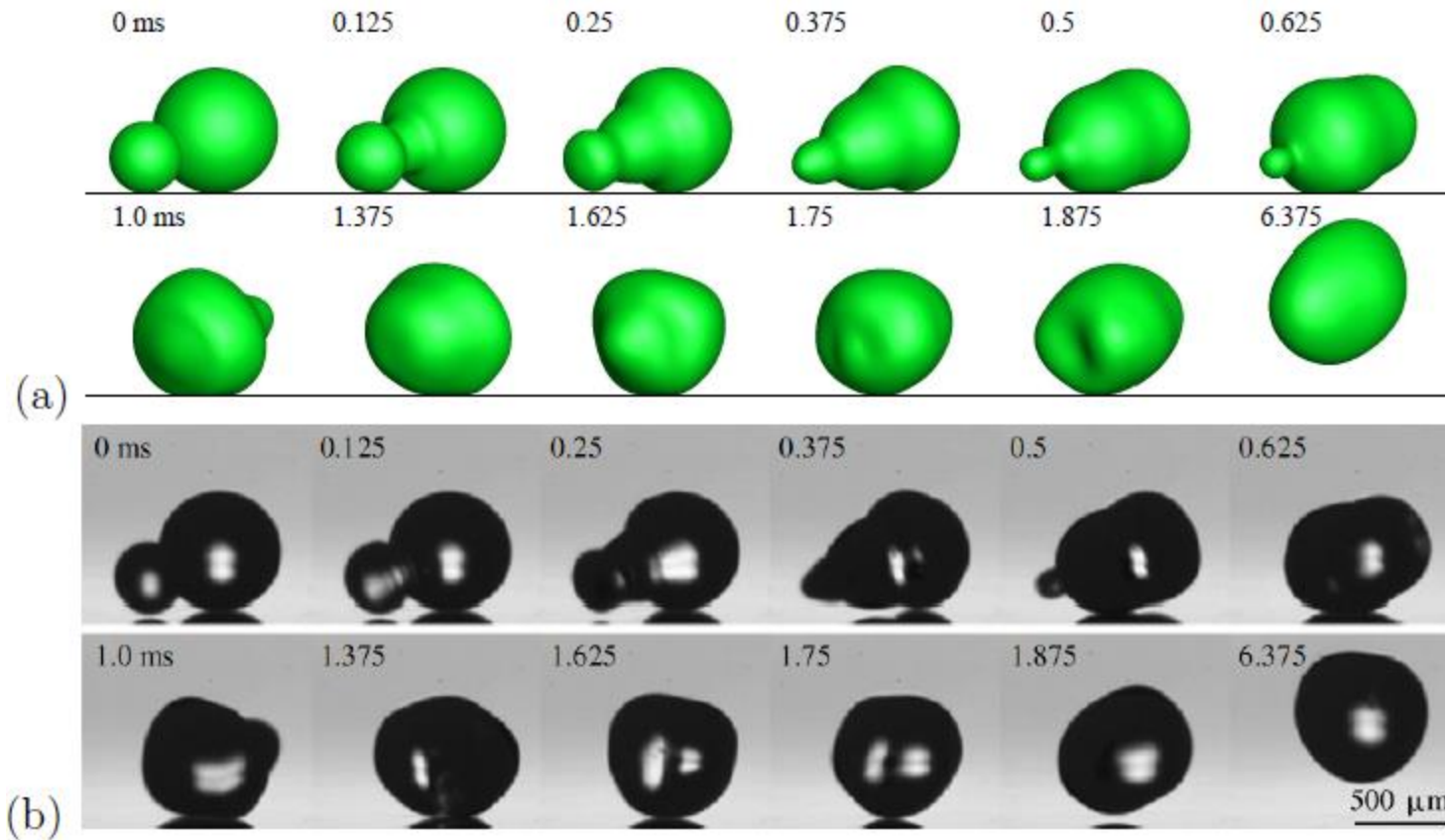
$$r_1/r_0 = 0.9$$
$$v_j^* = 0.062$$



$$r_1/r_0 = 0.3$$
$$v_j^* = 0.00957$$

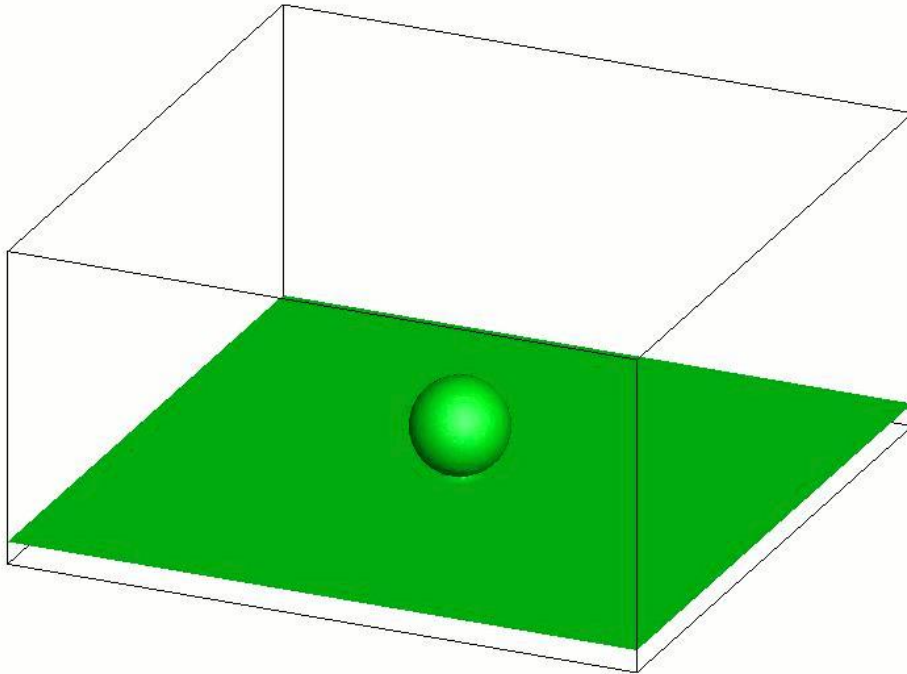
Such jumping motion results from the surface energy released upon drop coalescence and can be used to enhance condensation heat transfer.

## 4) Comparison with experiments



F. Liu, G. Ghigliotti, J. J. Feng, and C. H. Chen, Self-propelled jumping upon drop coalescence on Leidenfrost surfaces," J. Fluid Mech., vol. 752, pp. 22-38, 2014.

## 5. 液滴冲击液体表面



Lin K. et al, Paper to be submitted

## 4.4.5 国内外学术界的评价与应用的例子

### 1. 韩国科学院/工程院两院院士Na教授评价



ELSEVIER

Contents lists available at [SciVerse ScienceDirect](#)

Applied Surface Science

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/apsusc](http://www.elsevier.com/locate/apsusc)

#### Three-dimensional thermal simulation of nanosecond laser ablation for semitransparent material

Junsu Ahn<sup>1</sup>, Suck-Joo Na<sup>\*</sup>

Department of Mechanical Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 305-701, Republic of Korea

prime advantage of the VOF method over the LS method is its accuracy of the mass calculation, which is important to estimate the amount of material removal in the numerical simulation of laser material processing. The LS method gives smoother representation of the free surface, which is indispensable for the calculation of the reflected/refracted ray direction. Because the VOF and the LS methods are complementary to each other, some methods that couple them have been suggested [9–12]. However, they are complicated because both the LS advection equation and VOF advection equation need to be solved together. Sun and Tao [13] suggested a simpler method in which only the VOF advection equation needs to be solved. The LS function which is needed for the free surface reconstruction is calculated by geometric operation of the volume fraction data of VOF.

LS reconstruction can be achieved by a proper calculation of the value of the signed distance function. The idea of Sun and Tao [13] is similar to that of the present study, but the main difference is the location at which the values of the signed distance function are calculated and stored; it is the center of the cell in Sun and Tao's work, but the node in the present work. This is because the nodal value is more readily applicable to the ray/surface intersection calculation in a cell. The details of LS reconstruction are described in the following sections.

- [13] D.L. Sun, W.Q. Tao, A coupled volume-of-fluid and level set (VOSET) method for computing incompressible two-phase flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53 (2010) 645–655.

## 2. 爱尔兰Dublin City University的Albadawi评价

认为“许多复合方法需要同时求解LS和VOF传输方程，但孙和陶提出了一种复合方法VOSET该方法只需求解VOF传输方程，而LS函数通过VOF函数的几何构建获得”。

International Journal of Multiphase Flow 53 (2013) 11–28



ELSEVIER

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

International Journal of Multiphase Flow

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/ijmulflow](http://www.elsevier.com/locate/ijmulflow)



Influence of surface tension implementation in Volume of Fluid and coupled Volume of Fluid with Level Set methods for bubble growth and detachment

A. Albadawi<sup>a,\*</sup>, D.B. Donoghue<sup>b</sup>, A.J. Robinson<sup>b</sup>, D.B. Murray<sup>b</sup>, Y.M.C. Delauré<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>School of Mechanical and Manufacturing Engineering, Dublin City University, Glasnevin, Dublin, Ireland

<sup>b</sup>Department of Mechanical and Manufacturing Engineering, Trinity College Dublin, Ireland

2002) or an analytical solution (Ménard et al., 2007). Although most coupling models solve both the LS and the VOF advection equations (Sussman and Puckett, 2000; Son and Hur, 2002), Sun and Tao (2010) have proposed a coupled method which relies on the solution of the VOF advection equation with geometrical reconstruction of the LS function from the VOF function. Kunkel-

Sun, D., Tao, W., 2010. A coupled volume-of-fluid and level set (voset) method for computing incompressible two-phase flows. *Int. J. Heat Mass Transfer* 53, 645–655.

### 3. 我国台湾核能研究所的Chiu研究员

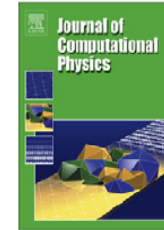
评价认为“提出的VOSET方法可用于解决由于VOF和Level Set方法引起的问题”，同时采用VOSET方法的计算结果验证了该论文计算结果的正确性和精确性。



Contents lists available at [ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

Journal of Computational Physics

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jcp](http://www.elsevier.com/locate/jcp)



A conservative phase field method for solving incompressible two-phase flows

Pao-Hsiung Chiu\*, Yan-Ting Lin

Nuclear Engineering Division, Institute of Nuclear Energy Research, Taoyuan County, Taiwan, Republic of China

ume conservation, because of re-initialization error and errors from advection calculation such as conservation error. The CLSVOF (coupled level set and volume-of-fluid) method [7], THINC (tangent of hyperbola for interface capturing) method [8,9], VOSET (volume-of-fluid and level set) method [10], and conservative level set method [11] have been proposed to resolve the problems arisen from the VOF or/and level set method. These schemes can obtain the mass-conserving and accurate solutions. However, the implementation of these schemes are still more complicated than the original VOF or level set methods.

[10] D.L. Sun, W.Q. Tao, A coupled volume-of-fluid and level set (VOSET) method for computing incompressible two-phase flows, Int. J. Heat Mass Transfer 53 (2010) 645–655.

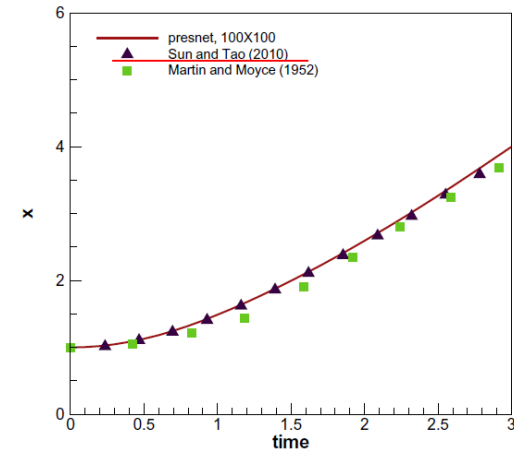


Fig. 7. Calculated results for the dam-break problem. Comparisons of the predicted front locations with the experimental data [32] and the numerical results [10].



# 4. 美国University of Rhode Island Amir Banari教授评价

## 对比了LBM方法与VOSET方法的计算结果，验证了VOSET方法的精确性

Computers & Fluids 93 (2014) 1–17



Contents lists available at ScienceDirect

Computers & Fluids

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/complfluid](http://www.elsevier.com/locate/complfluid)



### Efficient GPGPU implementation of a lattice Boltzmann model for multiphase flows with high density ratios



Amir Banari<sup>a</sup>, Christian Janßen<sup>a,b</sup>, Stephan T. Grilli<sup>a,\*</sup>, Manfred Krafczyk<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Department of Ocean Engineering, University of Rhode Island, USA

<sup>b</sup> Inst. M-8, Fluid Dynamics and Ship Theory, Hamburg University of Technology, Germany

<sup>c</sup> Institute for Computational Modeling in Civil Engineering, Technische Universität Braunschweig, Germany

eter,  $g$  is the gravitational acceleration, and  $\nu_1$  and  $\mu_1$  are the kinematic and dynamic viscosities of the heavier fluid, respectively. The terminal shapes of individual rising bubbles were experimentally observed for a range of Reynolds and Bond numbers [31], and can be generally regrouped into the following cap shape regimes: (a) spherical, (b) ellipsoidal, and (c) curved ellipsoidal. In the spherical regime, for small Bo, surface tension is dominant. The large surface tension force prevents the deformation of the bubble under inertia and viscous forces; consequently, the shape of the bubble remains (nearly) spherical during its rise. When increasing the Reynolds and Bond numbers, the contribution of surface tension gradually becomes less important as compared to inertia, and the terminal shape of the bubble becomes ellipsoidal for moderate Reynolds and Bond numbers ( $10 < Re < 500$  and  $10 < Bo < 100$ ), and spherical for high Reynolds and Bond numbers.

In the LBM simulations, a circular fluid bubble of density  $\rho'_2 = 6$  and initial diameter  $D'_0 = 60$  is located one bubble diameter above the bottom of a rectangular domain discretized with  $256 \times 1024$  LBM cells, filled with a fluid of density  $\rho'_1 = 6000$  (hence  $\rho'_1/\rho'_2 = 1000$ ); the fluid viscosity ratio is  $\mu'_1/\mu'_2 = 1000$ . Both fluids are assumed to be stationary at initial time  $t' = 0$  and we specify a periodic boundary condition on the lateral sides of the domain

Fig. 5.10. Rayleigh–Taylor instability problem for  $\rho_1/\rho_2 = 3, A = 0.5, Re = 256$ . Time evolution of the two-fluid interface for four dimensionless times  $t' = t/\sqrt{L/g}$ : (leftward panels) results of [8]; (rightward panels) present LB results.

and a bounce-back condition on the top and bottom boundaries. Simulations are run for 3 test cases (a–c) with different Mo and Bo values, given in Table 5.3 together with LBM and other flow parameters, corresponding to the three flow and bubble shape regimes discussed above.

Since we only solve for a two-dimensional (2D) flow, we cannot compare our LBM simulation results to experiments. However, we can validate results by comparing them to an independent 2D numerical solution, such as that of Sun and Tao [33], who used a hybrid volume-of-fluid and level set (VOSET) method to simulate incompressible two-phase flows. In Fig. 5.8, the terminal shapes of the bubbles and the velocity fields computed with the LBM for the 3 cases are compared to Sun and Tao's results. We see that both the predicted bubble shape and flow fields agree well with the reference solution.

Fig. 5.9 further shows the computed time evolution of the bubble shape during its rise, for the case of Fig. 5.8(c). During the early

研究结果  
被独立地  
重复十分  
重要！！



## 5. 伊朗Tarbiat Modares University学者Azadi 评价

采用VOSET方法计算研究了气液界面拓扑变化过程。认为VOSET是一种新的相界面捕捉复合方法，该方法具有质量守恒特性，同时可以计算得出准确的界面表面张力，该方法的精确性优于传统的VOF方法。



Contents lists available at [ScienceDirect](http://ScienceDirect.com)

Computers and Fluids

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/complfluid](http://www.elsevier.com/locate/complfluid)



### Capturing of interface topological changes in two-phase gas-liquid flows using a coupled volume-of-fluid and level-set method (VOSET)



Mohammad Reza Ansari\*, Reza Azadi, Ebrahim Salimi

Faculty of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, P.O. Box 14115-143, Tehran, Islamic Republic of Iran

#### ARTICLE INFO

##### Article history:

Received 30 April 2015

Revised 14 July 2015

Accepted 30 September 2015

Available online 1 December 2015

##### Keywords:

Two-phase

Interface topology

VOSET

Bubble rise

Initial bubble shape

#### ABSTRACT

There are different approaches and methods to predict the interface changes in two-phase flows. Among these methods, volume-of-fluid (VOF) and level-set (LS) are some of the most famous ones. Common VOF schemes are mass conservative but cannot predict the surface tension with a good accuracy. In contrast, LS uses a continuous sign function which in turn computes surface tension more accurately than VOF. But, re-distancing the LS function causes mass gain/loss which violates the mass conservation. To have the advantages of both methods, a scheme called VOSET is introduced in the present research which couples the two methods fully geometrically. VOSET is used in the structure of the code developed to study the interface topological changes of gas-liquid two-phase flows. The results show that in addition to being mass-conserved, the method computes the surface tension with a good accuracy. Then the code is used to study the bubble topology rising in a quiescent liquid for different Morton and Eotvos numbers. The simulation results show a good agreement with available experimental data. Finally the effect of bubble initial shape on its terminal shape and velocity is investigated by VOSET. For the simulation cases, the effect of initial bubble topology was not noticeable.

## 6. 西班牙学者Nestor等的推广

基于VOSET方法的思想，在三角形非结构化网格系统上构建了一种复合气液界面追踪方法。

Computers and Fluids 124 (2016) 12–29



Contents lists available at ScienceDirect

Computers and Fluids

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/compfluid](http://www.elsevier.com/locate/compfluid)



A coupled volume-of-fluid/level-set method for simulation of two-phase flows on unstructured meshes



Néstor Balcázar<sup>a,\*</sup>, Oriol Lehmkuhl<sup>a,b</sup>, Lluís Jofre<sup>a</sup>, Joaquim Rigola<sup>a</sup>, Assensi Oliva<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Hear and Mass Transfer Technological Center (CTTC), Universitat Politècnica de Catalunya – BarcelonaTech (UPC), ETSEIAT, Colom 11, 08222 Terrassa, Barcelona, Spain

<sup>b</sup>Termo Fluids, S.L., Avda Jacquard 97 1-E, 08222 Terrassa, Barcelona, Spain

## 7. 我校李会雄教授团队的推广

将VOSET方法推广到了2D和3D动态自适应直角树状非结构化网格系统，并研究了电场下气泡的运动特性。

International Journal of Heat and Mass Transfer 67 (2013) 70–73



Contents lists available at ScienceDirect

International Journal of Heat and Mass Transfer

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/ijhmt](http://www.elsevier.com/locate/ijhmt)



Technical Note

A coupled volume-of-fluid and level set (VOSET) method on dynamically adaptive quadtree grids



Tai Wang, Huixiong Li\*, Yongchang Feng, Dongxiao Shi

State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, PR China

*Numerical Heat Transfer, Part A*, 67: 1352–1369, 2015.

Copyright © Taylor & Francis Group, LLC

ISSN: 1040-7782 print/1521-0634 online

DOI: 10.1080/10407782.2014.965116



**NUMERICAL SIMULATION OF BUBBLE DYNAMICS  
IN A UNIFORM ELECTRIC FIELD BY THE ADAPTIVE  
3D-VOSET METHOD**

**Tai Wang, Huixiong Li, Yifan Zhang, and Dongxiao Shi**

State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering,  
Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi, P. R. China

## 8. 我校毕勤成教授团队的应用

采用VOSET方法模拟了磁场下磁流体液滴的运动规律。

*Numerical Heat Transfer, Part A*, 66: 144–164, 2014  
Copyright © Taylor & Francis Group, LLC  
ISSN: 1040-7782 print/1521-0634 online  
DOI: 10.1080/10407782.2013.869459

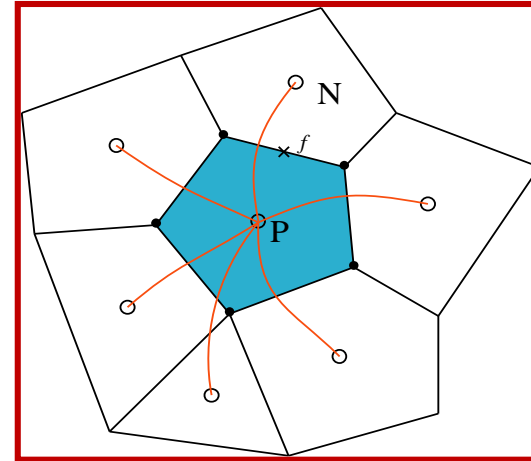


### NUMERICAL SIMULATION OF A FALLING FERROFLUID DROPLET IN A UNIFORM MAGNETIC FIELD BY THE VOSET METHOD

Dongxiao Shi, Qincheng Bi, and Rongqi Zhou

*State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi, P. R. China*

## 向二维任意突多边形的推广已经完成



## 补充文献

Brackbill JU, Kothe DB, Zemach C. A continuum method for modeling surface tension [J]. *J. Comput. Phys*, 1992, 100: 335-354 (表面张力模型)

Denis Gueyffier, Jie Li, Ali Nadim, Ruben Scardovelli, and St'ephane Zaleski, Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows, *J. Comput. Physics*, 1999, 152, 423-456

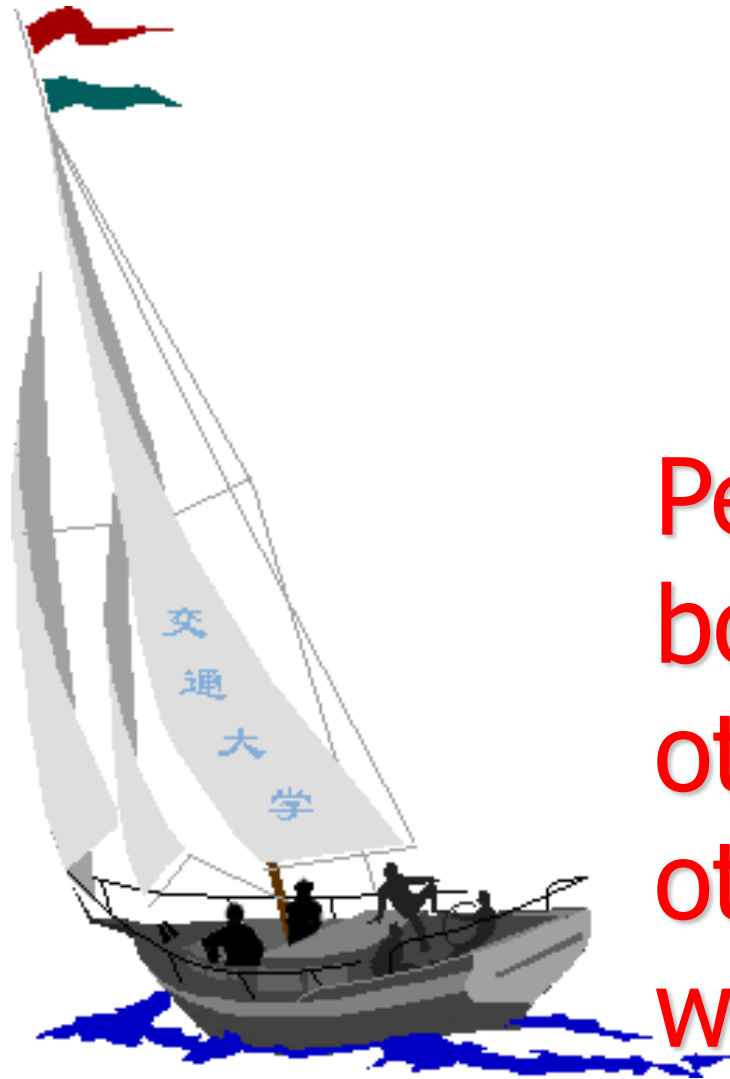
D.Z. Guo, D.L. Sun, Z.Y. Li, W. Q. Tao, Phase Change Heat Transfer Simulation for Boiling Bubbles Arising from a Vapor Film by VOSET Method, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2011, vol. 59, 857-881

K. Ling, Z.Y. Li, W.Q. Tao, A direct numerical simulation for nucleate boiling by the VOSET method, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2014, vol.65, 949-971

Kong Ling, Gihun Son, Dong-Liang Sun, Wen-Quan Tao, Three dimensional numerical simulation on bubble growth and merger in microchannel boiling flow, *Int. J Thermal Science*, 2015 98:135-147

## 推荐阅读文献

- [1] D.L. Sun, W.Q. Tao, A coupled volume-of-fluid and level set method (VOSET) for computing incompressible two-phase flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 53, 645-655, 2010
- [2] Kong Lin, Zhao-Hui Li, Dong-Liang Sun, Ya-Ling He, Wen-Quan Tao , A three-dimensional volume of fluid & level set (VOSET) method for incompressible two-phase flow, *Computers & Fluids*, 2015,118:293-304
- [3] Q. Bian, R. Dai, X Tang, Q Liu, Q Wang, M Zeng, Investigation on the effect of the thermal dynamic, evaporation, and alternative material properties in a laser melt pool with a developed 2D model based on the VOSET method, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2017, vol. 71: 1104-1122



# 同舟共济 渡彼岸!

People in the same  
boat help each  
other to cross to the  
other bank,  
where....



# 西安交通大学能源与动力工程学院研究生课程《计算传热学的近代进展》课程答辩参考论题与论文撰写要求（2021.3.16）

## 一.参考论题

1. 用Delaunay方法对两个不规则区域生成非结构化网格，并讨论改变网格疏密的方法；
2. 用块结构化网格离散一个不规则区域，并实现其内的层流流动计算；
3. 分析对流项的有界性条件，论证它是充要条件还是充分条件，用数值例子说明你的观点；
4. 以数个二维问题为例，分析CD、SUD、QUICK以及SGSD格式的稳定性及计算时间；
5. 试采用一种三阶对称绝对稳定的格式计算一个流动问题，并与CD，SUD，QUICK格式比较计算精度、时间和稳定性；

6. 在结构化网格上实现一种高阶组合格式，对两个对流问题进行求解，与CD格式做稳定性的对比分析；
7. 实现PISO算法，用两个二维流动问题比较该算法与SIMPLE，SIMPLEC，及SIMPLER的收敛特性；
8. 实现SIMPLEX算法，用两个二维问题比较该算法与SIMPLE，SIMPLEC及SIMPLER的收敛特性；
9. 通过3~5个例题，比较IDEAL，SIMPLE，SIMPLEC的收敛特性与健壮性；
10. 试用两个计算实例，验证下列说法：计算的正确性主要取决于格式，而收敛的快慢主要取决于算法；

11. 对圆管内突扩流动及方腔内自然对流（参见节3-1-5例题）试采用松弛因子自适应方法及固定松弛因子法对比计算收敛特性。
12. 参考本组网页上的VOSET程序，计算一个需要扑捉界面的两相流问题（如气泡上升运动）；
13. 参考王金萍等提出的方法，实现IDEAL算法中N1,N2的自动选取方法，举例说明其优点。
14. 计算一个与专业有关的复杂流动与传热问题，至少采用本课程中介绍过的一种新方法，计算结果中应有一部分内容在文献中尚未见到报道；
15. 参考本组网页上的单相流动LBM程序，模拟二维通道中叉排或顺排圆柱中的流动并计算渗透率，进行网格独立性考核，查明圆柱直径和间距对渗透率的影响。

16. 参考何雅玲老师教材LBM流动程序和传热LBM程序，模拟方腔自然对流换热问题，并研究Gr数的影响。
17. 参考本组网页上LBM两相流动，模拟突扩突缩通道内两相流动过程。
18. 采用分子动力学方法模拟顶盖驱动流动/泊肃叶流动。
19. 采用分子动力学方法模拟表面结构形状对接触角的影响。
20. 构建一个分子动力学计算体系，计算其扩散系数。
21. 采用分子动力学方法计算纳米流体的导热系数。
22. 构建气-液-固三相模型研究壁面附近单原子流体在饱和状态下的热力学性质，查明固体壁面的存在对流体分子位型、流体的密度分布和压力张量分布的影响。
23. 对于计算流体力学与计算传热学在你所从事的技术工作中应用进行文献综述，至少包括20篇国际杂志或国际会议的论文。

# 本小组网页上虚拟仿真中心可下载的源程序

1. VOSET 气液两相流二维程序
2. 《数值传热学》教学程序SIMPLER最新版
3. 数值传热学教学程序 (SIMPLE)
4. 数值传热学教学程序(SIMPLER)
5. SIMPLER 程序注释版
6. 博士生教学程序(Delaunay.for & unstructured.for)
7. 本课热流问题教学一维程序
8. 涡量流函数法源程序
9. IDEAL程序
- 10.单相流动LBM程序
- 11.传质LBM程序

## 课程答辩

课程答辩讲解15分钟，提问3分钟，PPT大约在15~20页左右,主要介绍自己的工作，课堂上讲过的内容介绍可从简；同时提供一份纸质的报告和报告的电子版本。

## 二. 对课程论文的要求

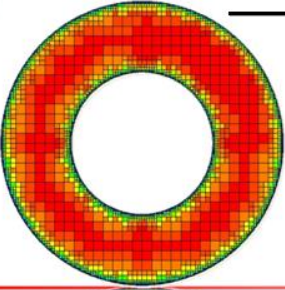
**1. 课程论文应按照西安交大学报（自然科学版）论文的要求撰写**，具体要求见西安交大学报每期的封里，但论文的长度可以放宽；凡新的推导力求详细；如计算部分系在教学程序基础上进行的，应附上修改部分的计算源程序及变量表；

**2. 约在2021-12月底左右间组织课程论文研讨与答辩**，具体时间由助教陈宇杰负责通知。

西安交通大学

# 四叉树网格生成

——计算传热学的近代进展



汇报人：尤伟

西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

西安交通大学  
Xi'an Jiaotong University

叶轮机械研究所  
Institute of Turbomachinery

# 非平衡凝结流动流线曲率法通流设计 程序开发及其应用研究

陈群飞

西安交通大学叶轮机械研究所

2013-7-4 1/24

# 带均光反射镜的槽式太阳能聚 光集热器的设计与数值研究

王坤

西安交通大学  
能源与动力工程学院  
热流科学与工程教育部重点实验室

西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

MOE-KLTFSE

# 含尘气体横掠圆管圆翅片管束的数值 模拟



汇报人：张晓丹  
指导老师：陶文铨教授

CFD-NHT-EHT  
CENTER



## Delaunay三角形化自动加点的实施方法

答辩人：贾浩

2013.1.6



## 多孔介质内对流换热数值研究



报告人：母玉同  
指导老师：陶文铨



## 预旋进气旋转盘腔流动与传热的数值研究

陶加银 3111011040 硕1013

## 基于SPH核函数的非牛顿流体MPS方法

报告人：向浩

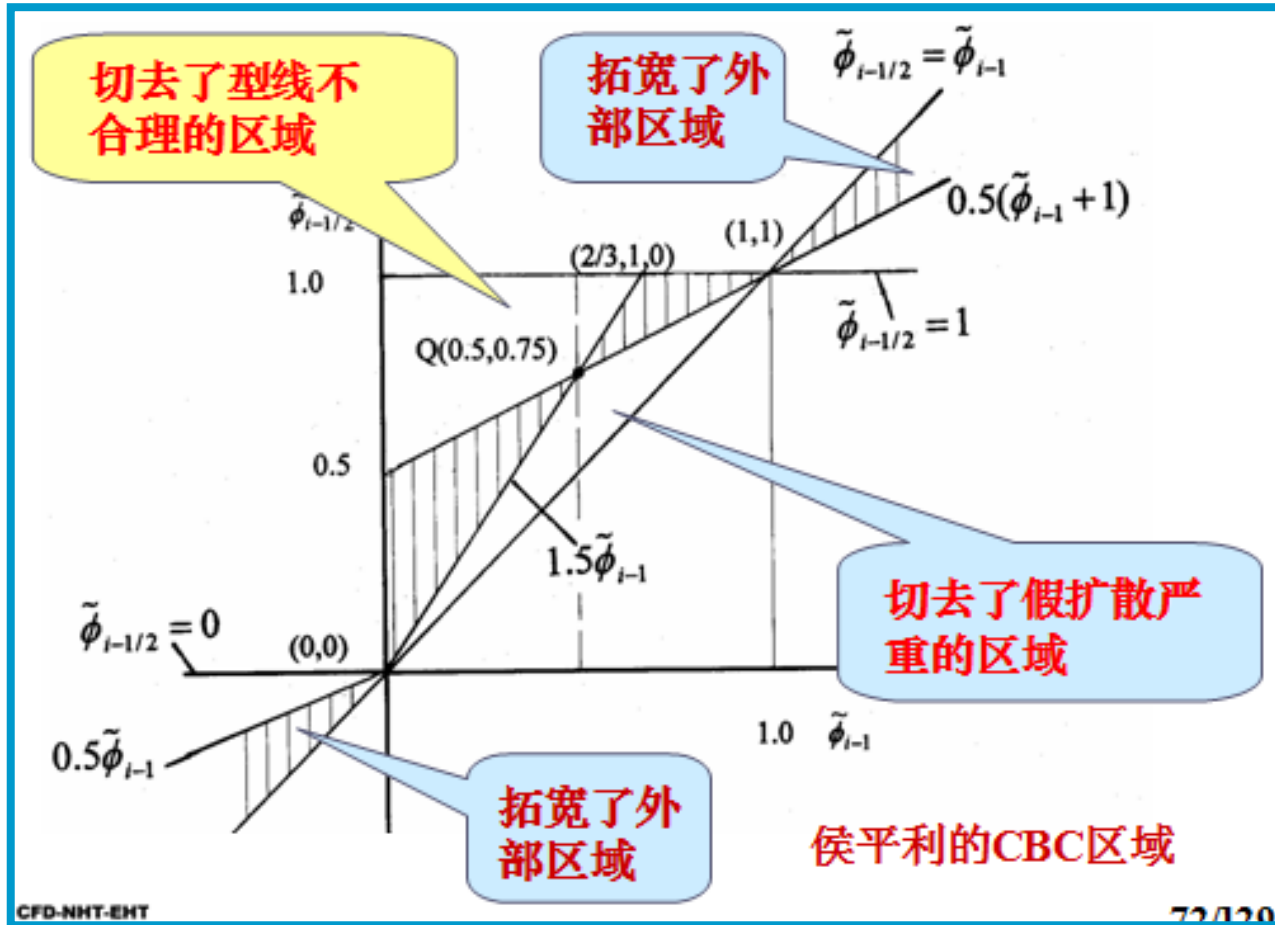
导师：陈斌 教授

西安交通大学动力工程多相流国家重点实验室



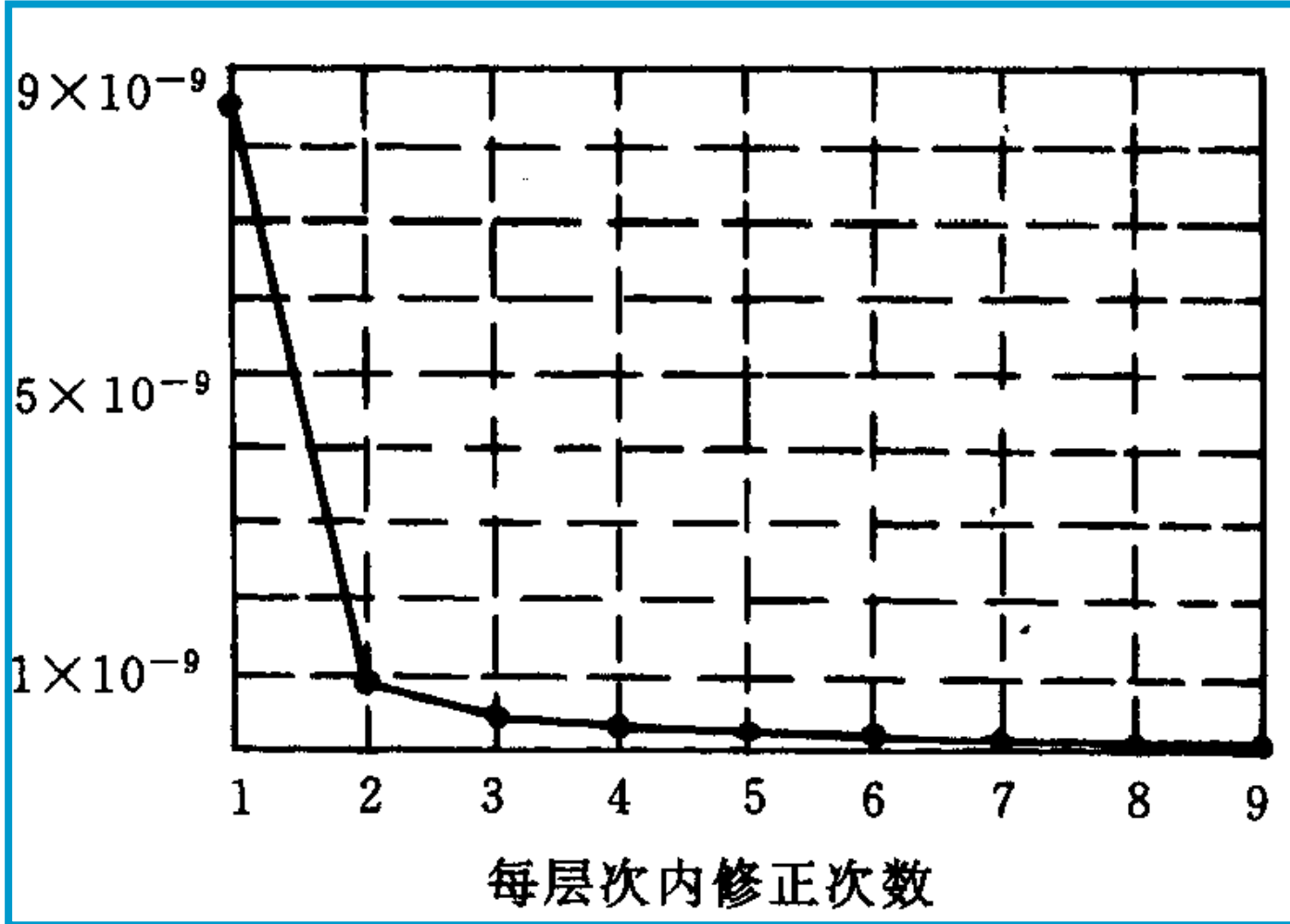
# 三个优秀的算例

# 算例1--侯平利博士（导师：俞茂铮教授）的工作

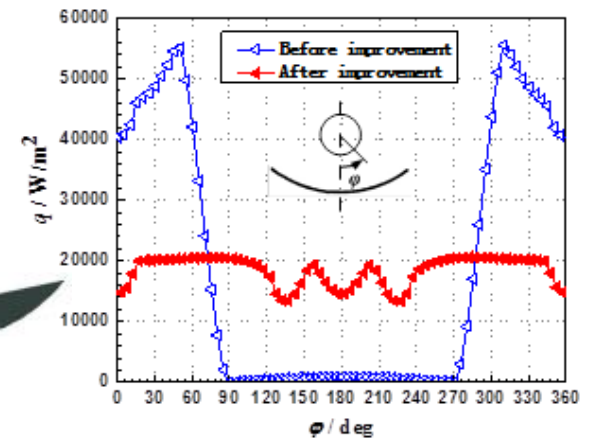
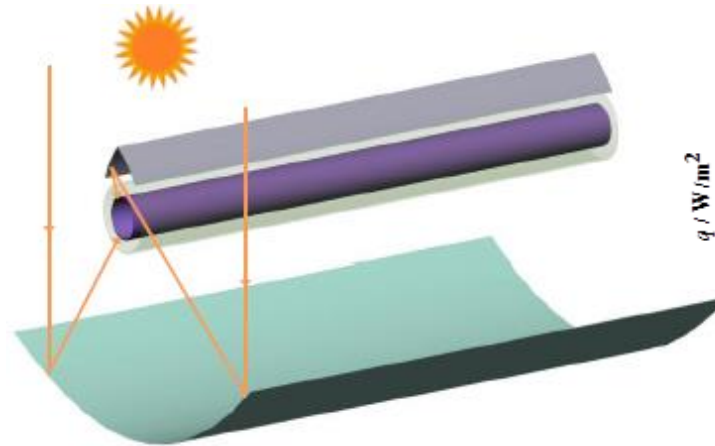
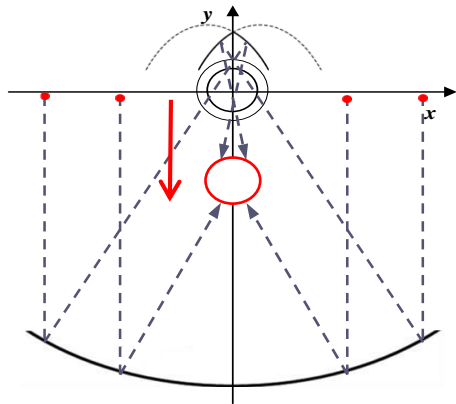
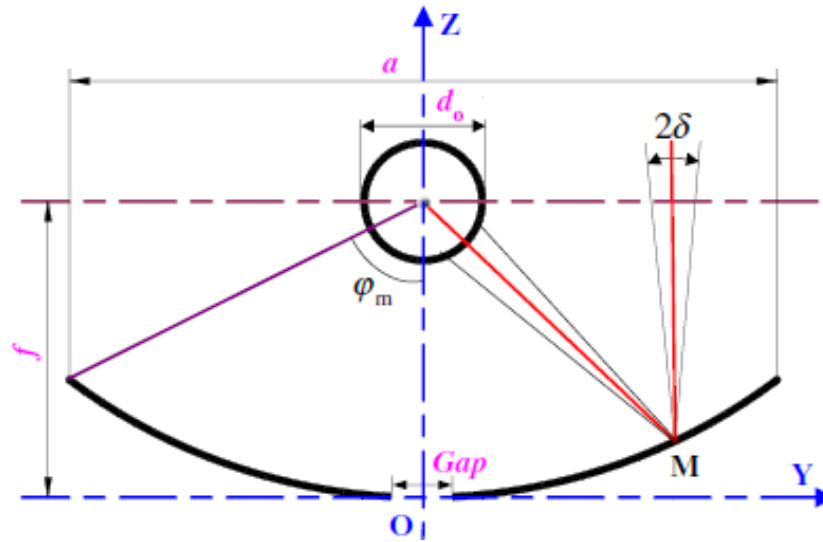


Hou P L, Tao W Q, Yu M Z., Refinement of the convective boundedness criterion of Gaskell and Lau, *Engineering Computations*, 20(2003) 1023-1043

# 算例2---党政博士（导师：王尚锦教授）的工作



# 算例3---王坤博士（导师：何雅玲教授）的工作



SCIENCE CHINA, Technological Sciences, 2014



# 同舟共济 渡彼岸!

People in the same  
boat help each  
other to cross to  
the other bank,  
where....

## Thanks for your attention!