

计算传热学的近代进展

第二章 网格生成技术



主讲 陶文铨

西安交通大学能源与动力工程学院
热流科学与工程教育部重点实验室
2017年4月19日, 西安

第二章目录

2.1 FVM中网格的分类

2.2 空间守恒定律及数值实施

2.3 块结构化网格简介

2.4 多块结构化网格界面信息传递方法

2.5 非结构化网格简介

2.6 Delaunay三角形化的方法

2.7 向计算区域内布点的方法

2.8 生成非结构化网格的前沿推进法

2.9 直角坐标系中的非结构化网格方法

2.1 FVM中网格的分类

2.1.1 按节点是否排列有序来分

2.1.2 按节点是否运动来分

2.1.3 按节点的分布在计算中是否变动来分

2.1 FVM中网格的分类

2.1.1 按节点是否排列有序来分

1.结构化网格—节点排列有序，节点间的联系信息不必专门存储 (structured grid)。



2. 非结构化网格—节点排列无序，节点之间的联系信息必须专门存储 (unstructured grid) 。

二维非结构化网格分类

Delaunay 三角形化方法 (Delaunay triangulation)

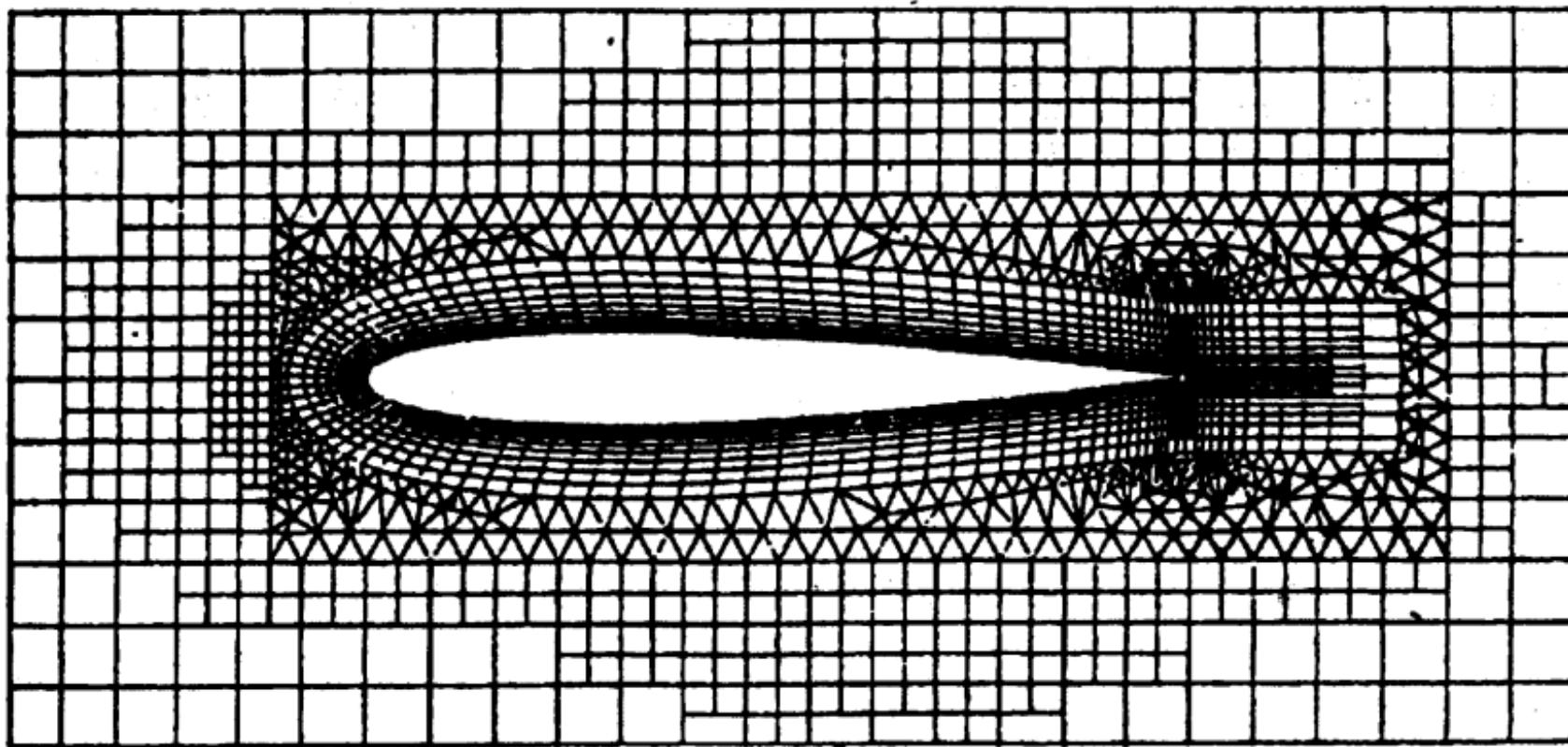
前沿推进法 (advancing front method)

直角坐标非结构化网格
(unstructured Cartesian coordinates):

单元切割法
(cut-cell method)

浸入边界法, IBM
(immersed boundary method,)

3. 混合网格—(hybrid grid) 。



混合网格应用举例

Tannehill JC, Anderson DA, Pletcher RH. Computational fluid mechanics and heat transfer. 2nd edition. Washington DC: Taylor & Francis, 1997, p. 708

2.1.2 按节点是否运动来分

1. 静止网格 — 节点在计算过程中无运动。
2. 运动网格 — 节点在计算过程中运动，应遵守空间守恒定律。

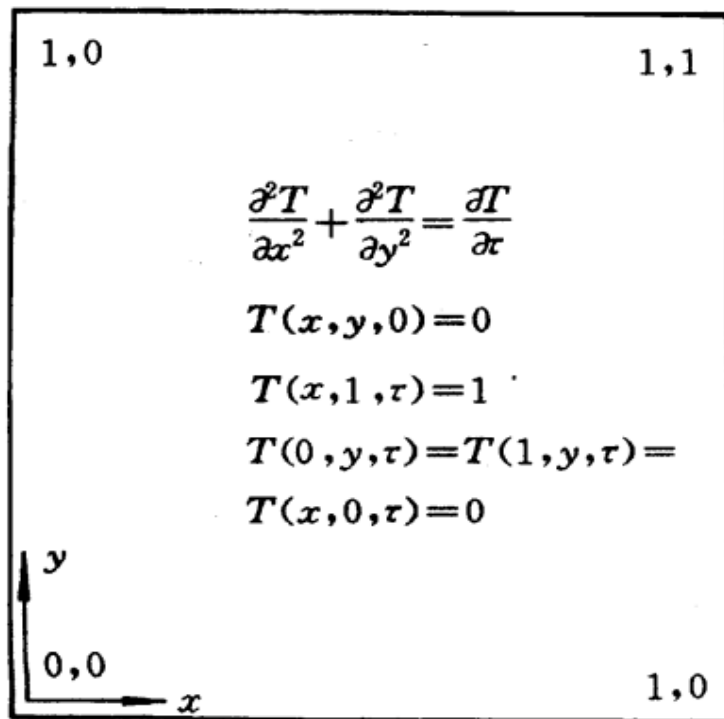
2.1.3 按节点分布在计算过程中是否变动来分

1. 非自适应网格 — 节点分布在计算过程中无变动。
2. 自适应网格(**self-adaptive grid**) — 节点分布在计算过程中按照一定原则变动以适应所计算的问题。

适应：适应变量变化剧烈的程度；适应流线或流动轨迹

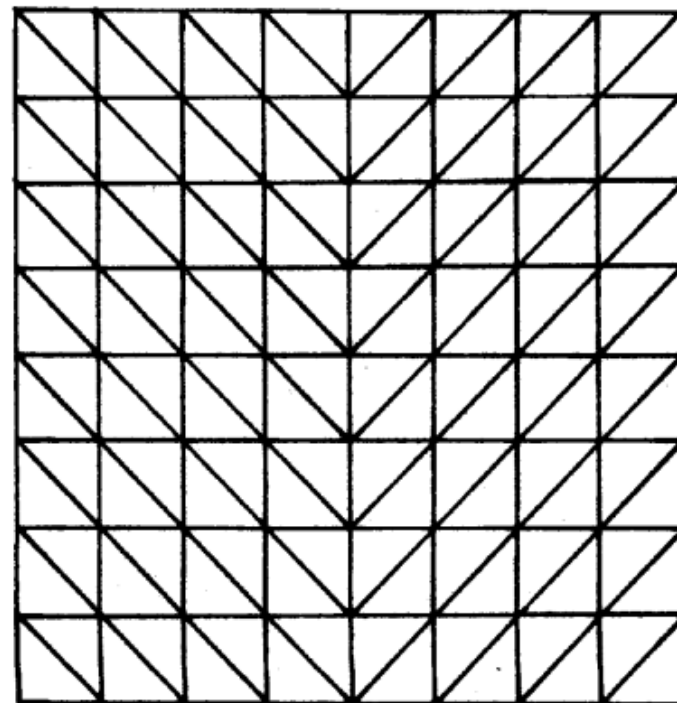
适应变量变化剧烈的程度

T=1



(a)

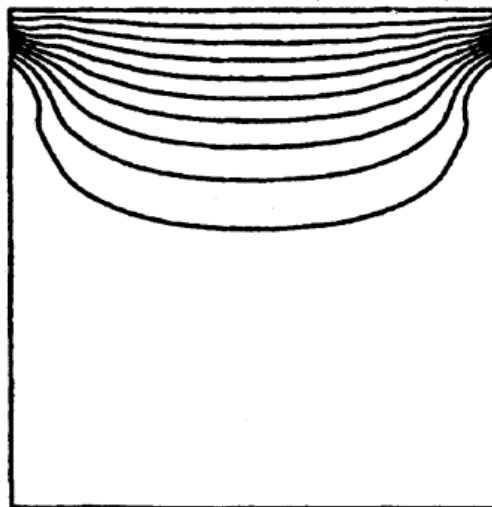
T=0



(b)

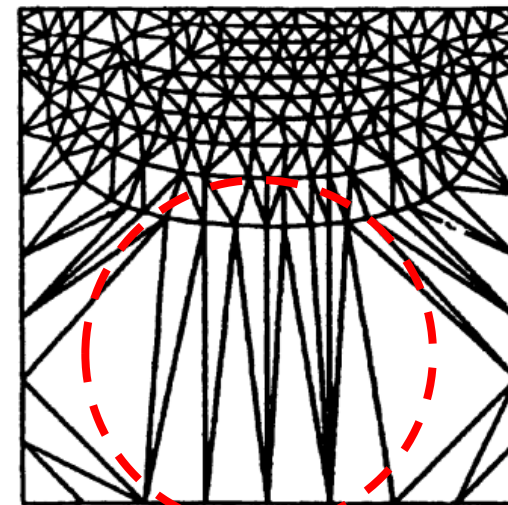
适应变量变化剧烈的程度

均分网
格的
等温线
计算结果



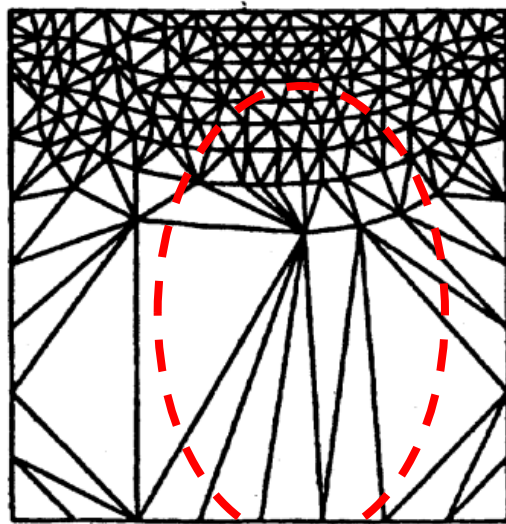
(a)

适应变量
变化剧烈的
程度非
结构化网
格(初步)



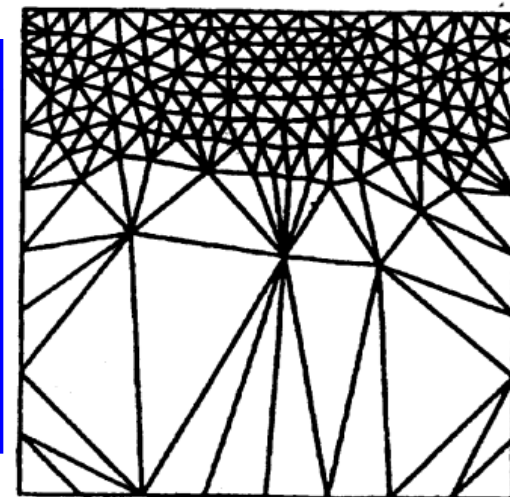
(b)

适应变量
变化剧烈的
程度非
结构化网
格(改进)



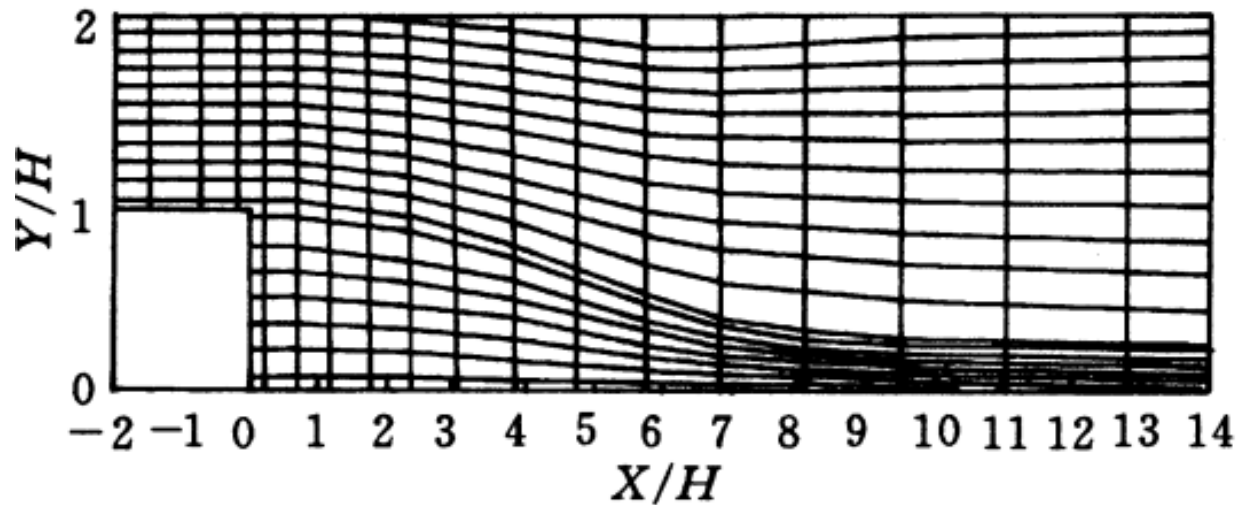
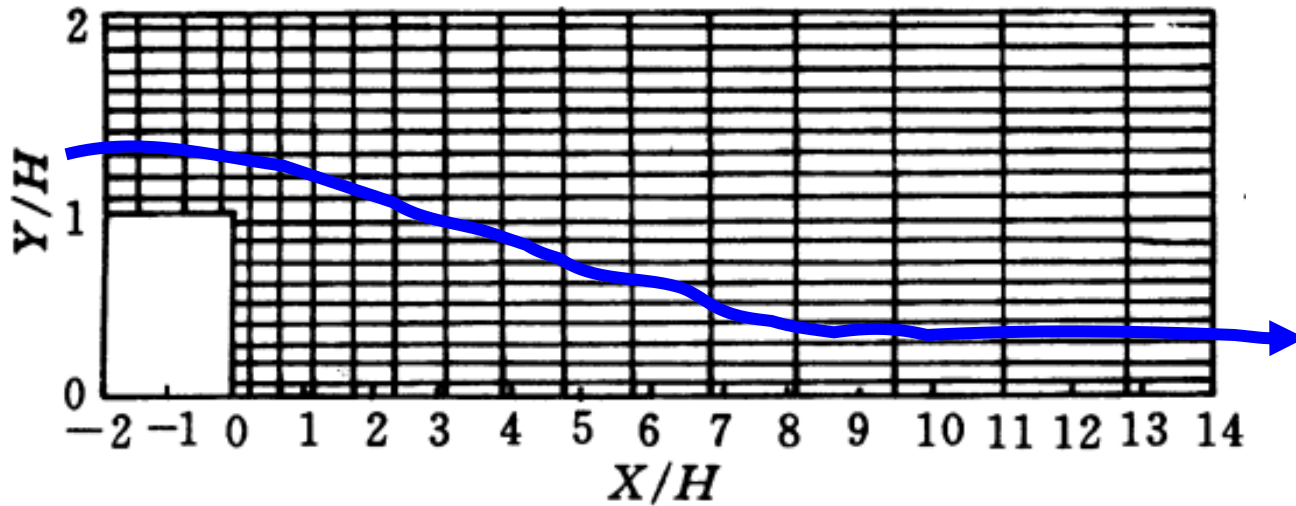
(c)

适应变量
变化剧烈的
程度非
结构化网
格(最终)



(d)

适应流线或流动轨迹



Chao Y C, Liu S S. Numer Heat Transfer, B, 1991, 20:145-168

2.2 空间守恒定律及数值实施

2.2.1 空间守恒定律（SCL）的数学表达形式

2.2.2 不满足SCL时计算误差示例

2.2.3 离散形式的SCL

2.2.4 对一维问题和正四边形元体SCL的数值实施

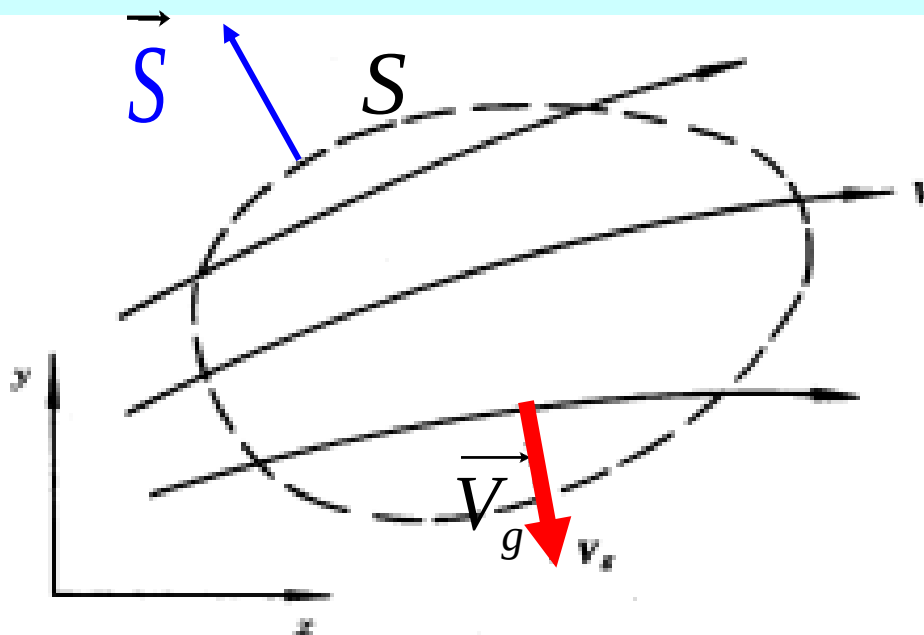
2.2.5 对任意四边形元体SCL的数值实施

2.2 空间守恒定律及数值实施

2.2.1 空间守恒定律（SCL）的数学表达形式

设流场中不存在质量源（汇），控制容积的界面 S 随时间运动，界面运动速度为 $\vec{V}_g$ ，界面面积矢量为 $\vec{S}$ ：

对该控制容积列出质量守恒关系式



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta v} \rho dv + \oint_S \rho (\vec{V} - \vec{V}_g) \cdot d\vec{S} = 0$$

Δv 中质量随时间的变化

Δv 中流出流进的净质量

上式对流体不运动的情形也应该成立，即：对于 $\vec{V} = 0$ 也成立

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta v} \rho dv - \oint_S \rho \vec{V}_g \cdot d\vec{S} = 0$$

当 Δv 足够小时，可从上式中消去密度，

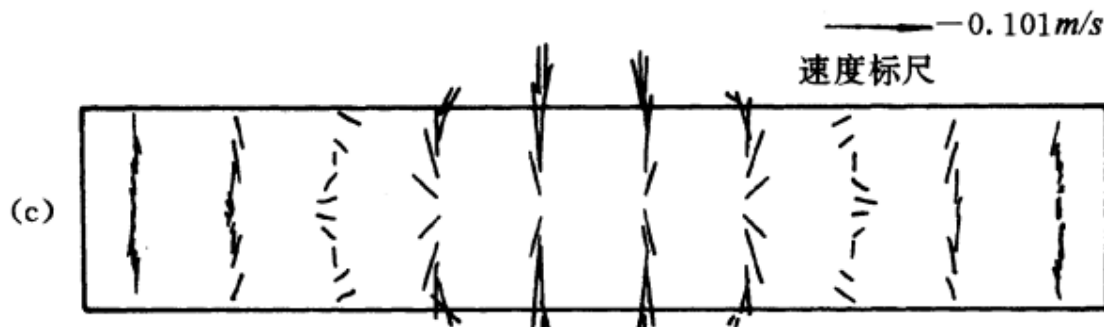
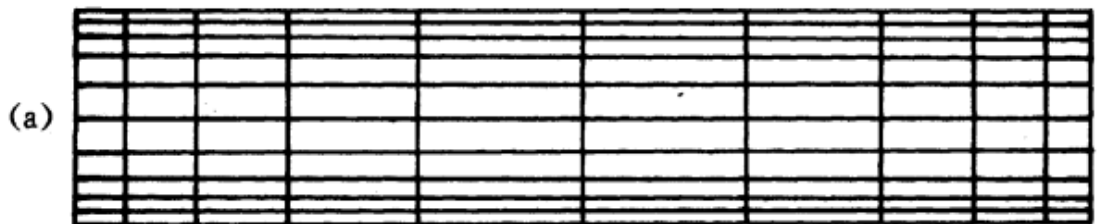
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta v} \rho dv - \oint_S \rho \vec{V}_g \cdot d\vec{S} = 0$$

得： $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta v} dv = \oint_S \vec{V}_g \cdot d\vec{S}$ **空间守恒定律 (SCL)**

几何意义：控制容积的体积对时间的变化率等于单位时间内其界面运动所扫过的空间（无论流体运动与否）。

离散求解时必须使离散形式的 **SCL** 成立。

2.2.2 不满足SCL时所引起的计算误差示例



**2D，不可压缩，
初始网格非均分，流体静止；**

**采用运动网格，
使一个时间步长后网格均分；**

**正确的计算结果
一个时间步长后流体
仍然应该静止！**

不满足SCL时的计算误差

Demirzic I, Peric M. Int J Numer Methods Fluids, 1988.8:1037-1050

2.2.3 离散形式的SCL

以四边形网格为例来分析。

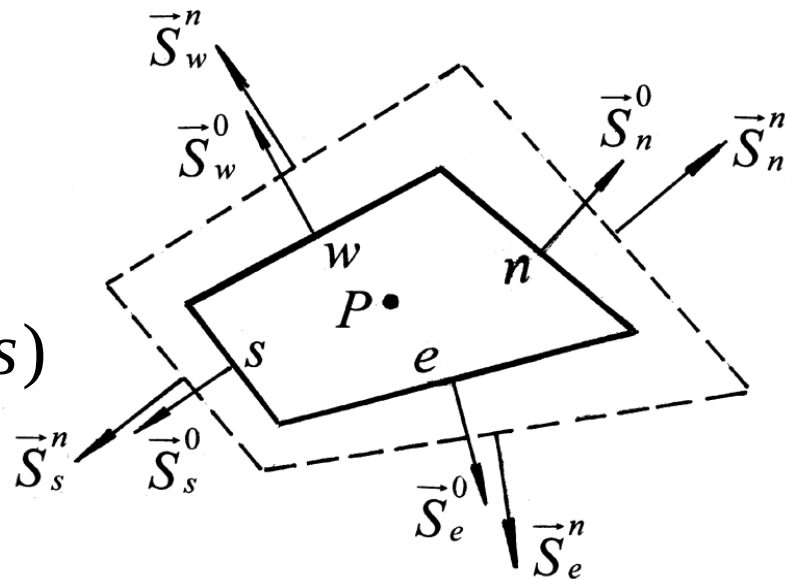
由于存在时间导数项，需对空间关系式是按初始时刻（显式）还是终了时刻计算（隐式）作出选择。

为保证稳定性取隐式。

离散形式的SCL为：

$$\frac{V^n - V^0}{\Delta t} = \sum \vec{V}_{gi} \cdot \vec{S}_i^n \quad (i = e, w, n, s)$$

矢量点积为正---体积扩大。



这里界面速度的方向以界面外法线矢量为依据。

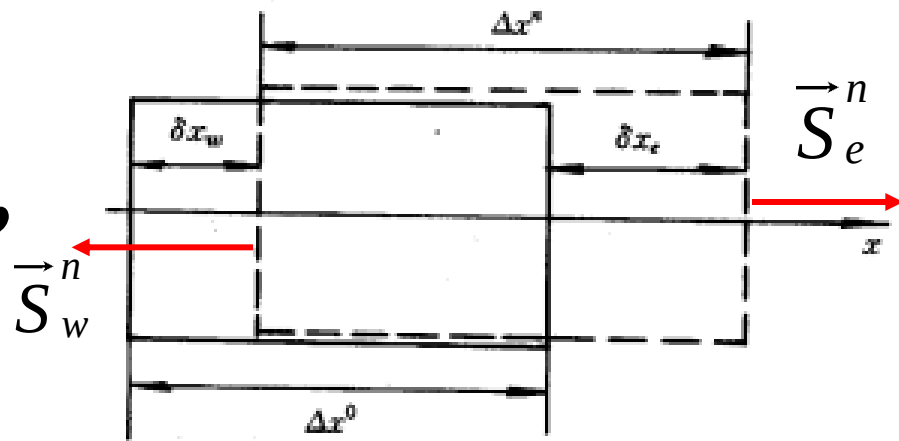
为保证上述离散形式**SCL**成立，**在计算界面流速时需要特别注意**。以下分三种情形讨论之。

2.2.4 对一维问题和正四边形元体**SCL**的数值实施

1. 对一维问题界面的**真实流速**可满足**SCL**

控制容积宽度由 Δx^0 变化到 Δx^n ，东界面移动 $(\delta x)_e$ ，西界面移动 $(\delta x)_w$ ，则两界面流速为：

$$U_{g,e} = \frac{(\delta x)_e}{\Delta t}, U_{g,w} = \frac{(\delta x)_w}{\Delta t}$$

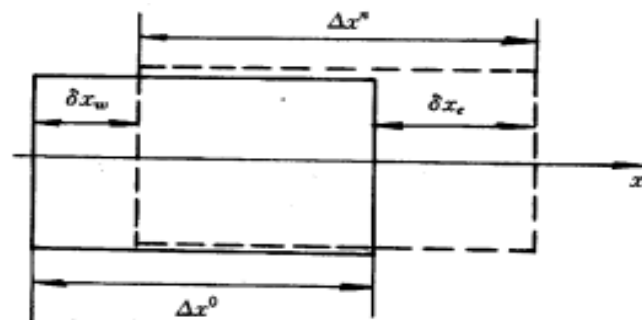


这样定义的界面流速可以满足**SCL**,

体积变化率:
$$\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{(\delta x)_e - (\delta x)_w}{\Delta t} = \frac{(\delta x)_e}{\Delta t} - \frac{(\delta x)_w}{\Delta t} = U_{g,e} - U_{g,w}$$

界面扫过的面积:
$$\sum \vec{V}_g \cdot \vec{S}_g = U_{g,e} \times 1 - U_{g,w} \times 1 = U_{g,e} - U_{g,w}$$

所以左端 = 右端!



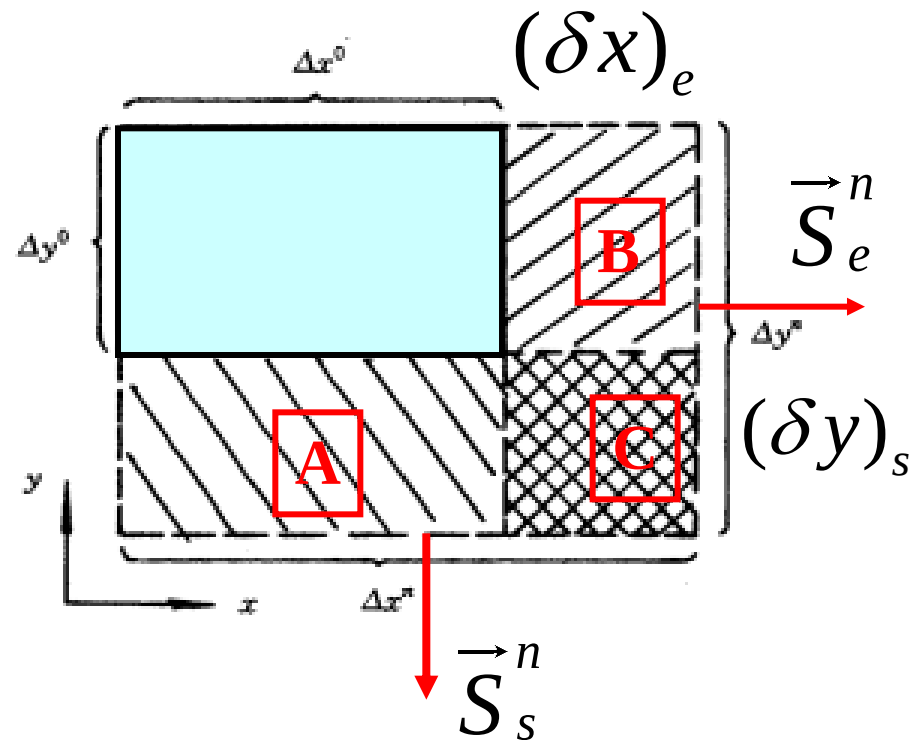
对一维问题满足**SCL**的界面流速就是界面的实际流速。

2. 对二维正四边形控制容积

设两个界面静止，
两个界面运动；

按常规计算方法界
面速度之值为：

$$U_{g,e} = \frac{(\delta x)_e}{\Delta t}, \quad V_{g,s} = \frac{(\delta y)_s}{\Delta t}$$



按SCL离散形式的左端---体积的时间变化率：

$$\frac{V^n - V^0}{\Delta t} = \frac{[\Delta x^0 + (\delta x)_e] \times [\Delta y^0 + (\delta y)_s] - \Delta x^0 \times \Delta y^0}{\Delta t} = \frac{A + B + C}{\Delta t}$$

A,B,C三小块面积之和！

SCL右端---该体积的界面扫过的面积如
按上述常规定义的速度计算:

$$U_{g,e} = \frac{(\delta x)_e}{\Delta t}$$

$$V_{g,s} = \frac{(\delta y)_s}{\Delta t}$$

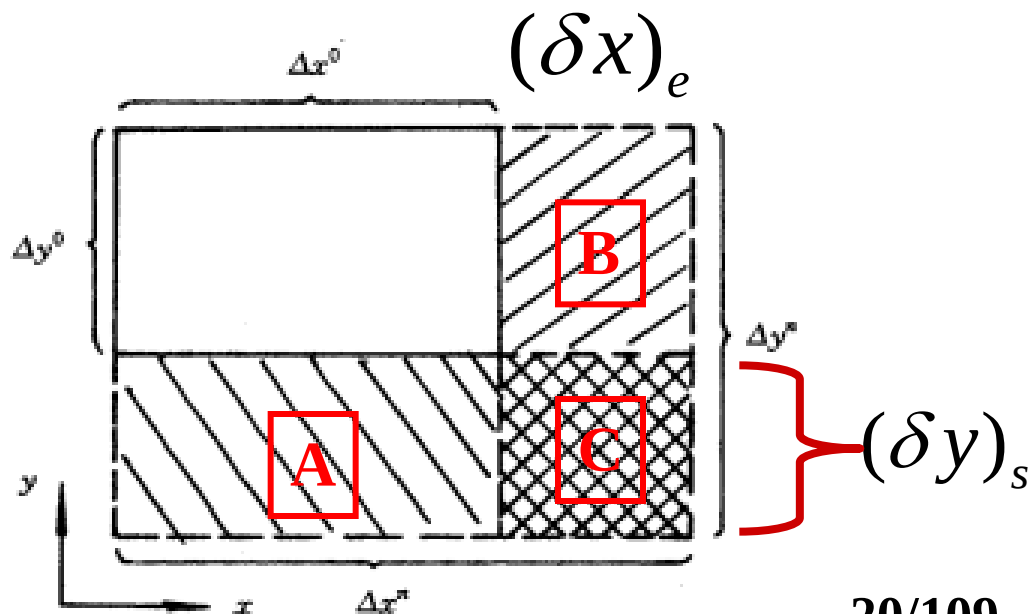
$$\sum \vec{V}_{g,i} \cdot \vec{S}_{g,i} = U_{g,e} \times \Delta y^n + V_{g,s} \times \Delta x^n =$$

$$\frac{(\delta x)_e \times \Delta y^n}{\Delta t} + \frac{(\delta y)_s \times \Delta x^n}{\Delta t} = \frac{(\delta x)_e \times \Delta y^n + (\delta y)_s \times \Delta x^n}{\Delta t}$$

$$= \frac{A + B + 2C}{\Delta t}!$$

右端 ~~≠~~ 左端

因面积矢量按终了时刻计算!

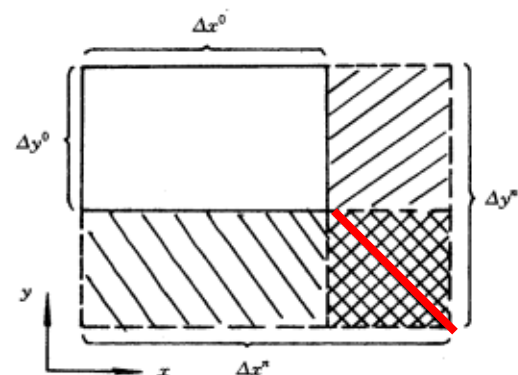


因为规定了面积矢量取隐式，使右端计算面积偏大，实际上界面扫过的面积应该按面积矢量的平均值计算，**通过对界面速度做修正来补偿：**

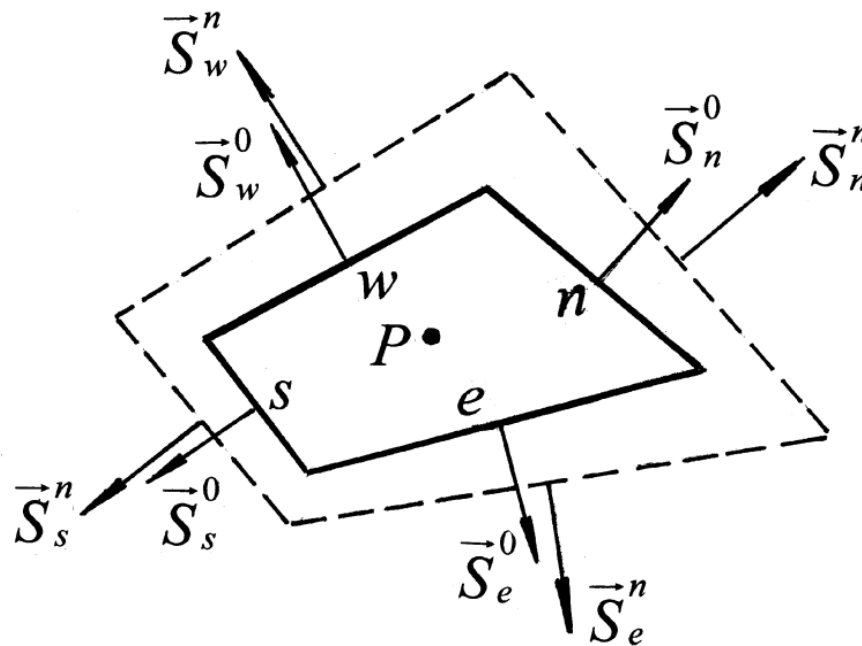
$$U_{g,e} = \frac{(\delta x)_e}{\Delta t} \times \left(\frac{\Delta y^0 + \Delta y^n}{2} \right) \frac{1}{\Delta y^n} \quad V_{g,s} = \frac{(\delta y)_s}{\Delta t} \times \left(\frac{\Delta x^0 + \Delta x^n}{2\Delta x^n} \right)$$

将对扫过面积的修正转移到界面流速的计算中

$$\begin{aligned} \sum \vec{V}_{g,i} \cdot \vec{S}_{g,i} &= U_{g,e} \times \Delta y^n + V_{g,s} \times \Delta x^n = \\ &= \frac{(\delta x)_e}{\Delta t} \times \frac{\Delta y^0 + \Delta y^n}{2\Delta y^n} \Delta y^n + \frac{(\delta y)_s}{\Delta t} \times \frac{\Delta x^0 + \Delta x^n}{2\Delta x^n} \Delta x^n \end{aligned}$$



上述一维与正四边形二维问题的特点是面积矢量的**方向**与界面运动速度保持一致，速度与面积矢量的点积为其模(绝对值)之积。如果面积矢量的大小与方向均变化，则点积应用分量乘积之和来实现。下面讨论任意四边形的情形。

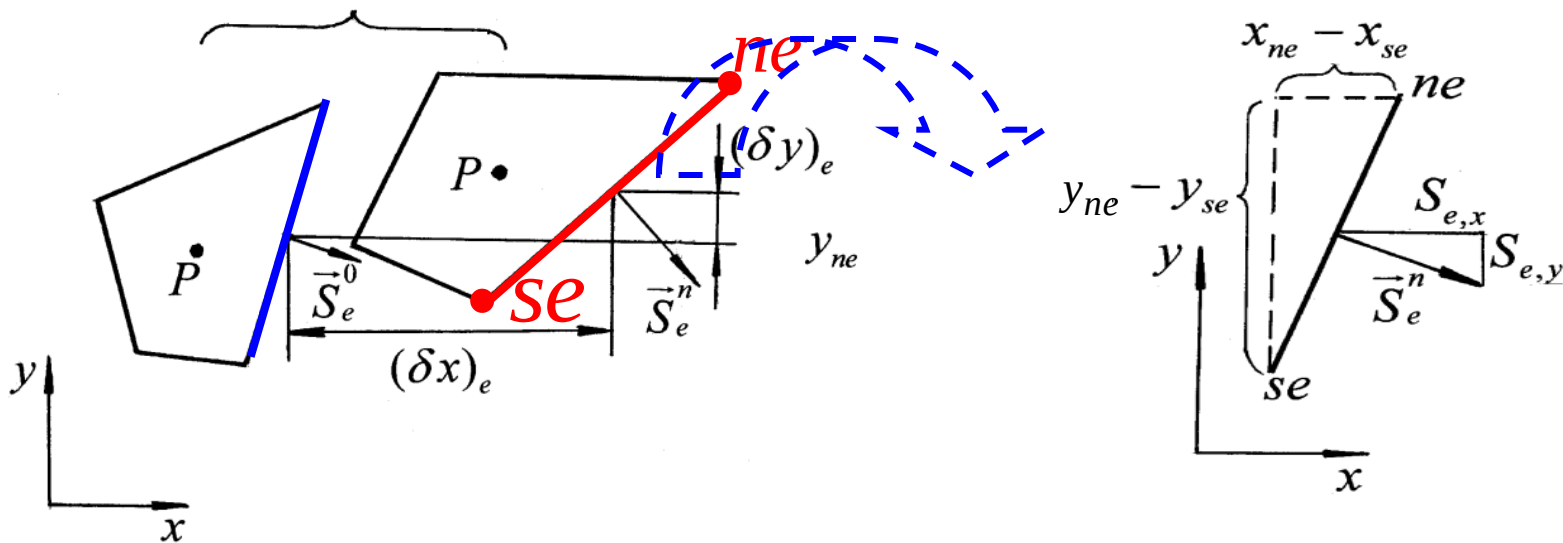


2.2.5 对任意四边形元体SCL的数值实施

任意四边形元体运动时每个边都可能有两个速度分量，对每个分量都应该进行修正。

1. 两矢量点积计算

$$\vec{U}_e \bullet \vec{S}_e = U_{e,x} \times S_e^x + U_{e,y} \times S_e^y$$



2. 面积矢量的表示

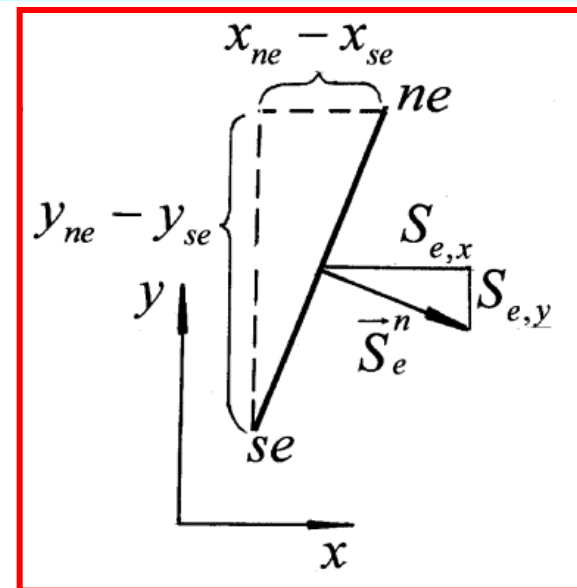
$$\vec{S}_e = S_{e,x} \vec{i} + S_{e,y} \vec{j} \quad \text{y 轴上投影为负}$$

利用相似三角形的关系

$$= (y_{ne} - y_{se}) \vec{i} - (x_{ne} - x_{se}) \vec{j}$$

$$S_{e,x} = y_{ne} - y_{se}; \quad S_{e,y} = \underline{x_{se} - x_{ne}}$$

注意 y 分量为负。



3. 满足SCL的界面速度分量表示式

$$U_{g,e} = \frac{(\delta x)_e}{\Delta t} \left[\frac{S_{e,x}^0 + S_{e,x}^n}{2S_{e,x}^n} \right]; \quad V_{g,e} = \frac{(\delta y)_e}{\Delta t} \left[\frac{S_{e,y}^0 + S_{e,y}^n}{2S_{e,y}^n} \right];$$

采用这样的界面速度计算方法就能保证SCL得到满足。

2.3 块结构化网格简介

2.3.1 块结构化网格的基本思想及优点

2.3.2 块结构化网格的类型

2.3.3 块结构化网格的主要研究内容

2.3 块结构化网格简介

2.3.1 块结构化网格的基本思想及优点

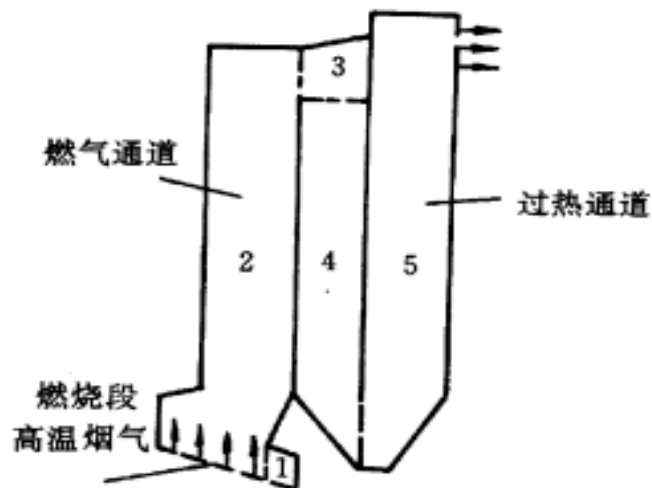
1. 基本思想

将整个求解区域根据实际情况分成数小块，每块按常规结构化网格进行离散，各块中可采用适体坐标，以适应不规则区域的需要；**各块间网格线不必连续。**

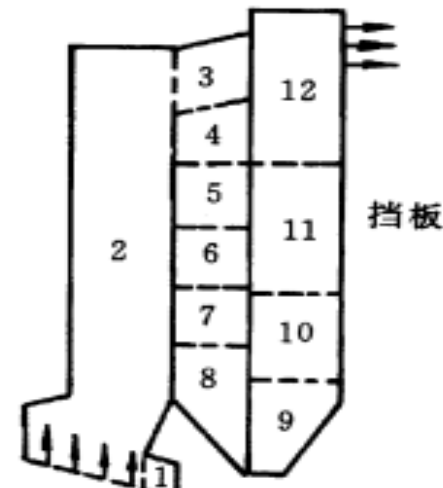
2. 优点

- 1) 减轻复杂区域网格生成的难度；
- 2) 便于采用并行算法；
- 3) 便于照顾到不同区域中不同空间尺度的需要。

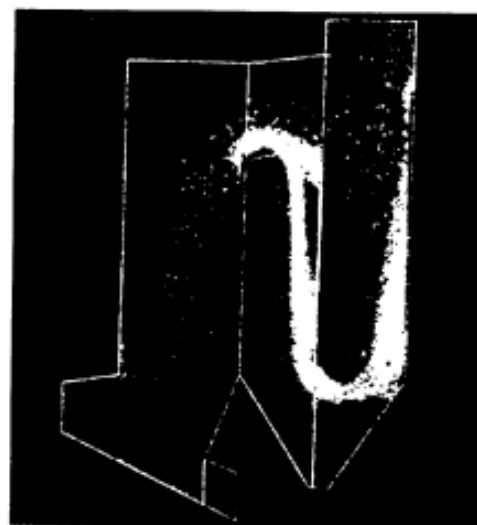
应用块结构化网格的成功范例



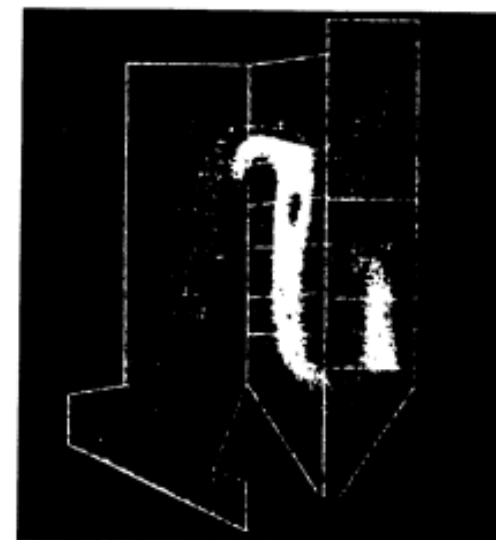
(a) 原设计



(b) 改型设计



(a) 原设计



(b) 改型设计

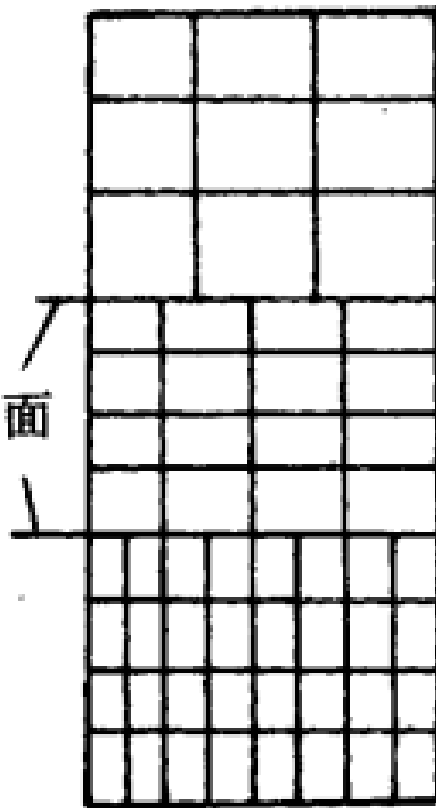
Thakur S, Shyy W, Udarkumar H S. Numer Heat Transfer, B, 1998, 33; 367-396

2.3.2 块结构化网格的类型

1. 拼片式(Patched)

非1-N型
(两片间
网格线
不贯穿)

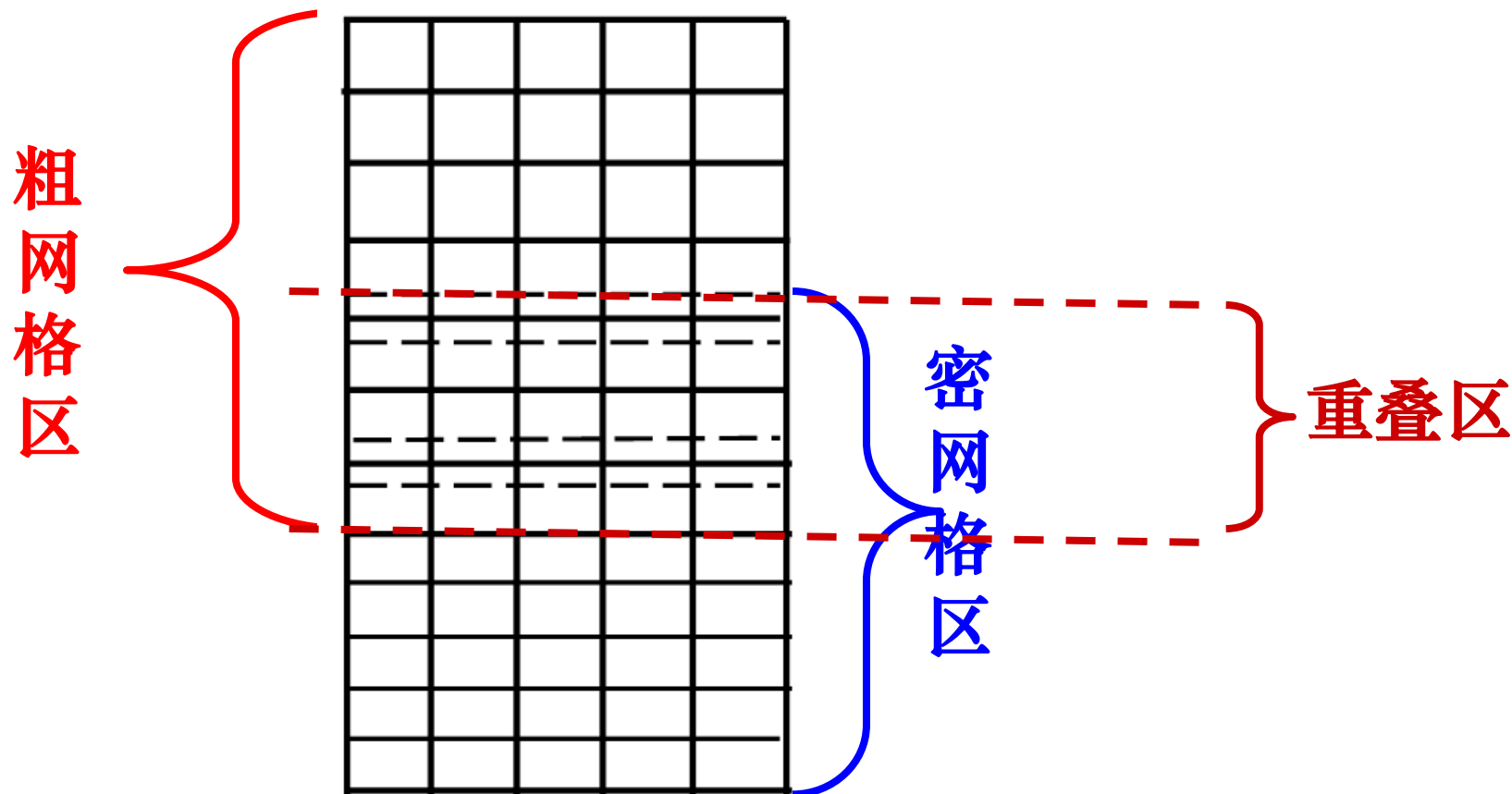
块界面



1-N型
(两片间
有贯穿
的网格
线)

特点：疏、密网格之间没有重叠区。

2. 搭接式 (Overlapping)



特点：存在疏、密网格的重叠区。网格线必贯穿。

2.3.3 块结构化网格的主要研究内容

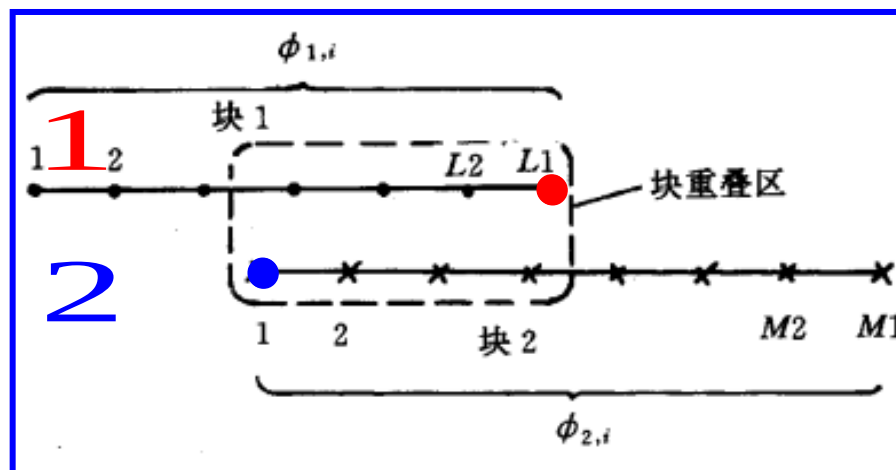
疏密网格交界处或者疏密网格重叠区的信息如何传递---要满足界面上物理量及其一阶导数连续的条件。

一般说有三种传递方式，本节中以一维问题为例来说明，多维问题在节2.4中讨论。

1. D-D 型传递（第一类传递，D—Dirichlet）

$$\phi_{1,L1} = \sum_i \gamma_i \phi_{2,i};$$

$$\phi_{2,1} = \sum_i \beta_i \phi_{1,i}$$



2. D-N 型传递（第一、二类传递，N-Neumann）

D型传递同上；**N**型传递用对应位置导数插值：

对网格1的L1用网格2相应位置导数插值：

$$(\phi_x)_{1,L1} = \sum_i \gamma_i (\phi_x)_{2,i+1/2}$$

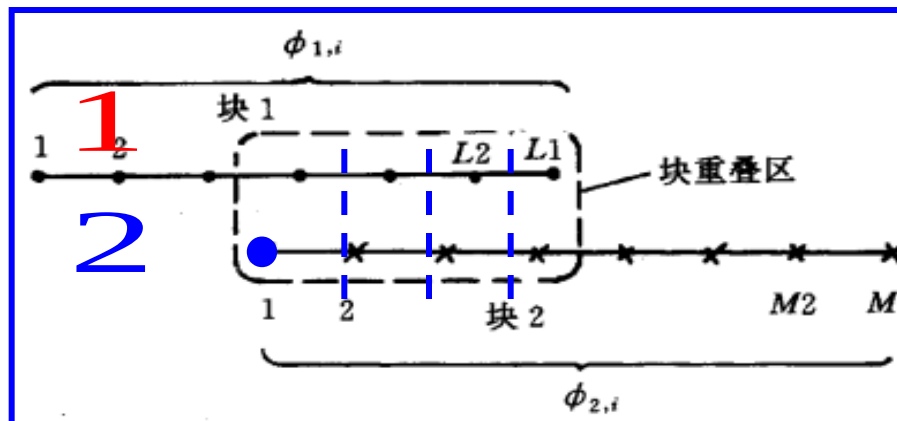
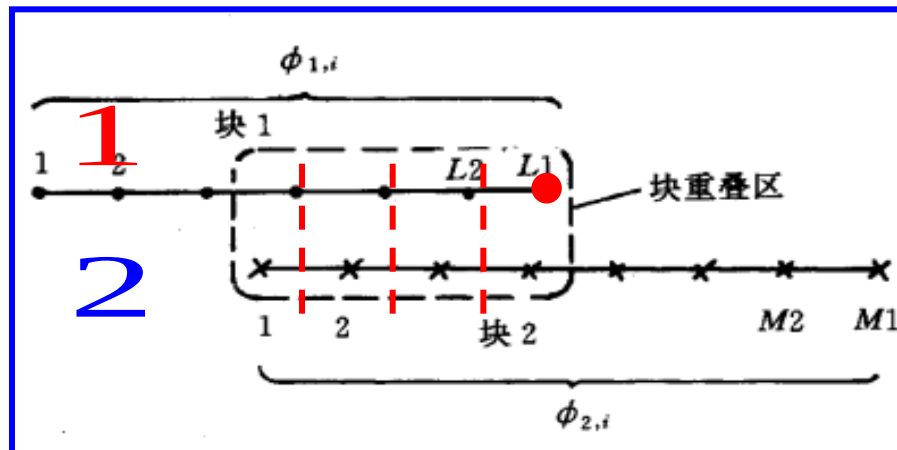
ϕ_x 表示对 x 一阶导数：

对网格2的1用网格1

插值：

$$(\phi_x)_{2,1} = \sum_i \beta_i (\phi_x)_{1,i+1/2}$$

N型必与**D**或**R**型结合。

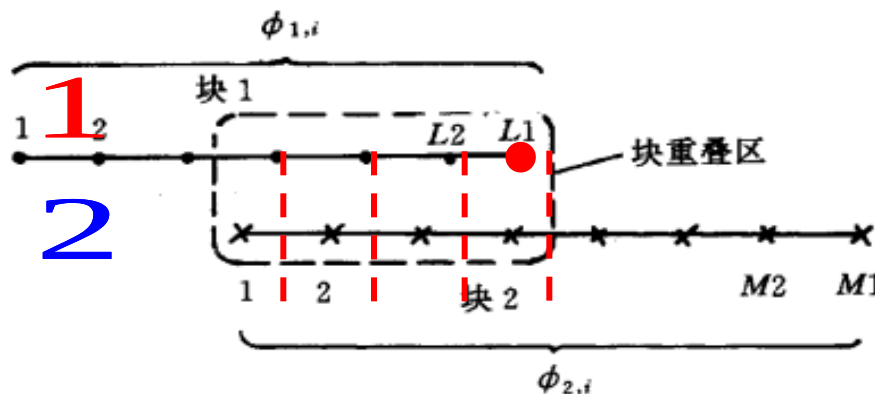


2. D-R 型传递（第一、三类传递，R—Rubin）

第三类边界条件是规定边界上的函数及其一阶导数间的关系，因此边界上的对流与扩散通量的传递就是第三类边界条件的传递：

对网格1的L1从网格2相应位置插值做R型传递：

$$(\rho u \phi - \Gamma \phi_x)_{1,L1} = \sum_i \gamma_i (\rho u \phi - \Gamma \phi_x)_{2,i+1/2}$$



2.4 多块结构化网格界面信息传递方法

2.4.1 拼片式块结构化网格界面信息传递方法

2.4.2 拼片式网格界面上压力修正值信息传递

2.4.3 搭接式块结构化网格界面信息传递方法

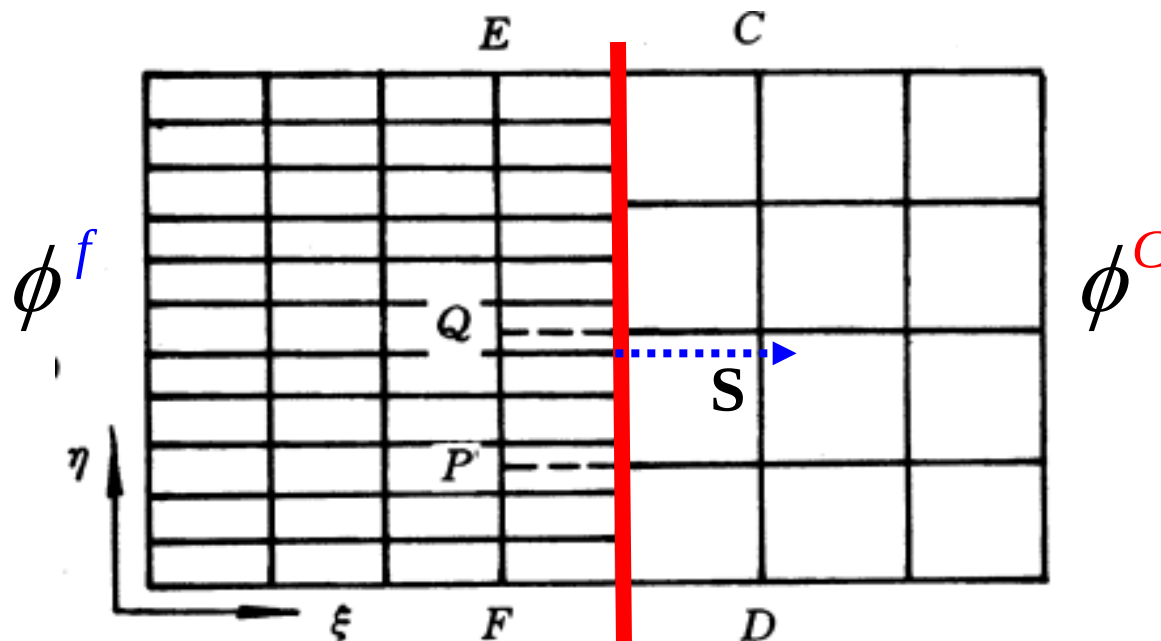
2.4.4 界面信息传递中应注意之点

2.4 块结构化网格界面信息传递方法

2.4.1 拼片式块结构化网格界面信息传递方法

1. 非1-N型（非整体包含）网格：延伸一格、D-N型插值

假设各块均为适体坐标，各块网格均分。两种网格各向对方延伸一格，延伸区采用对方的网格长度。



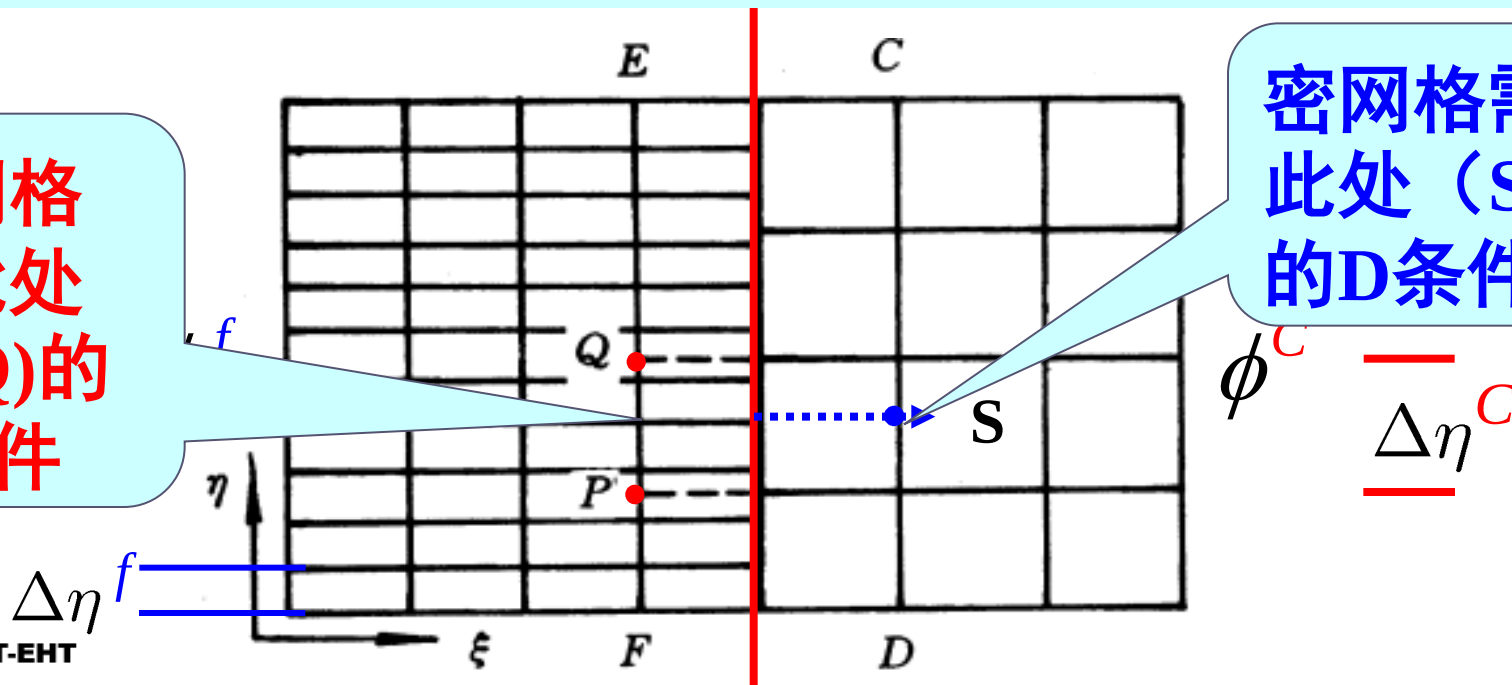
插值原则：对密网格，延伸区边界取**D**条件；对疏网格延伸区边界取**N**条件。

$$\phi_S^f = \sum_j \gamma_j \phi_j^C \quad q^C = \frac{1}{\Delta \eta^C} \int_P^Q q^f d\eta^f = \frac{1}{\Delta \eta^C} \sum_i q_i^f \Delta \eta_i^f N_i$$

N_i 为第 i 个密网格控制容积进入疏网格的百分数。

疏网格
需此处
(P-Q)的
N条件

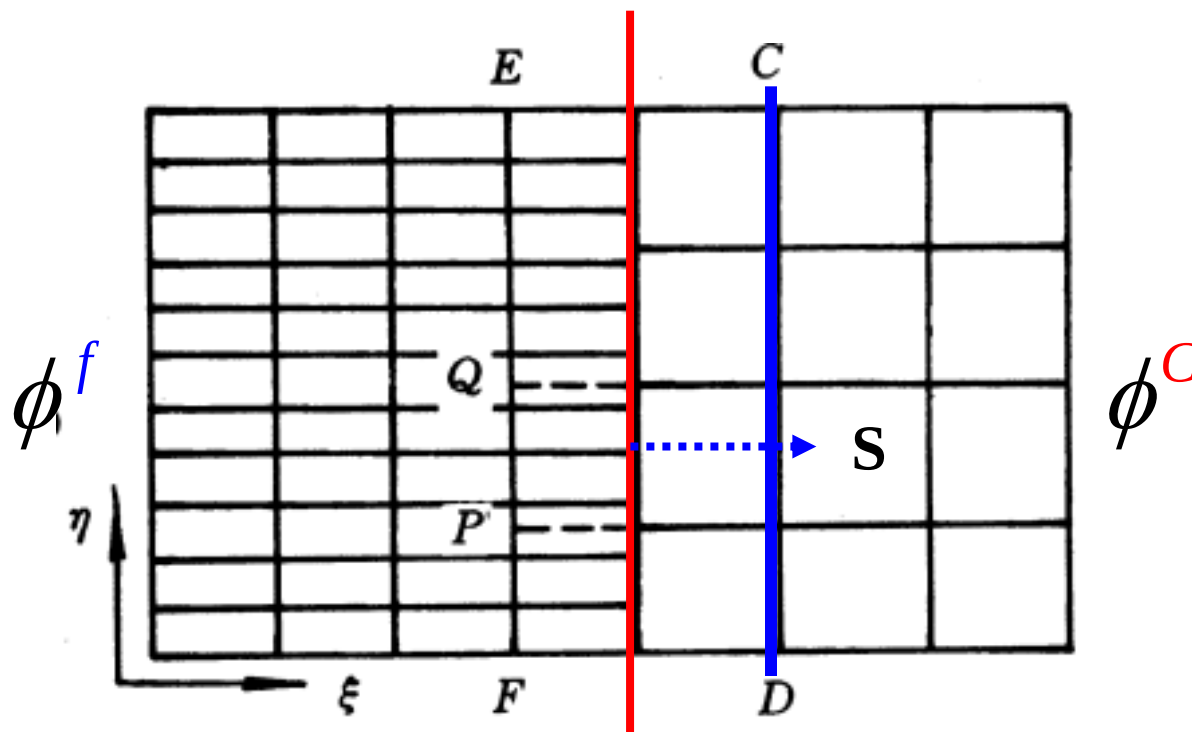
密网格需
此处 (S)
的D条件



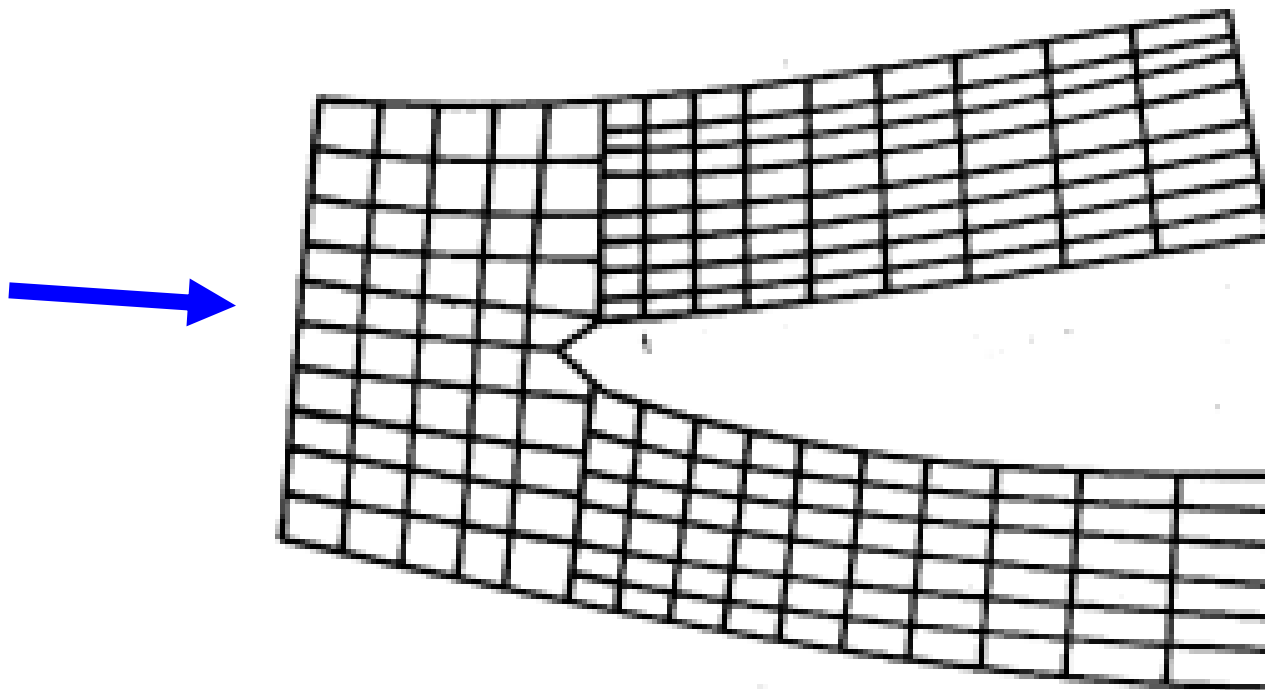
在D-插值的C-D线上需保证守恒条件成立：

$$\int_C^D q^f d\eta^f = \int_C^D q^C d\eta^C \quad (\text{离散形式成立})$$

如果上述条件不成立，修正 $\phi^f)_{CD}$ 使上式成立。



应用实例：分叉扩散器中流场的计算



Yung CN, Keith Tr TG, de Witt KJ. Int J Numer. Methods Fluids, 1989, 8:167-183

2.1-N型（整体包含）网格：不做延伸D-N型插值

对密网格（子元）可由疏网格直接插值获得边界上之值。

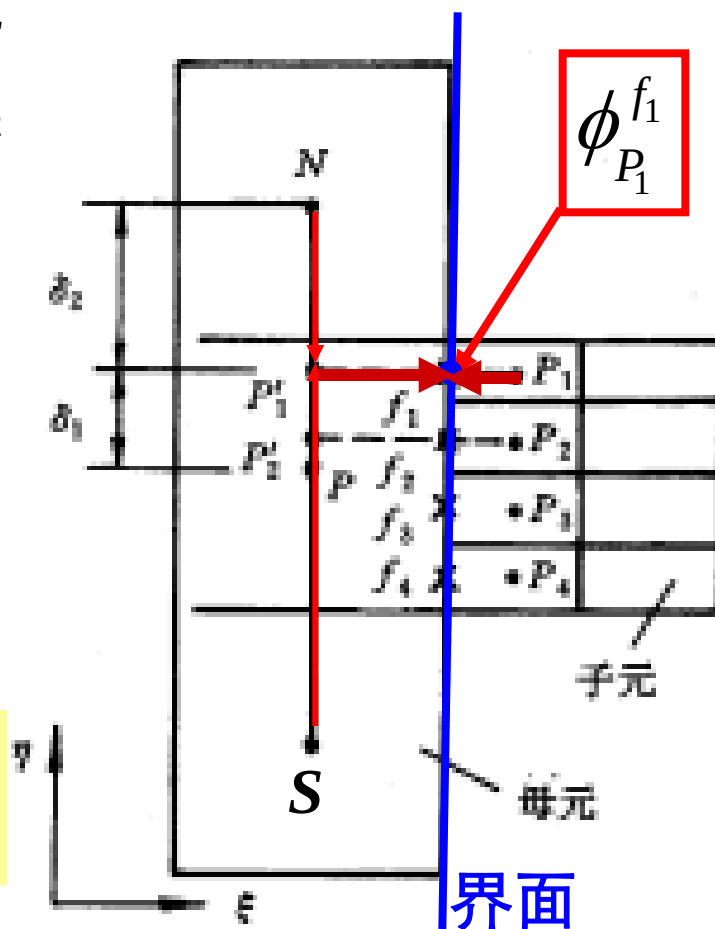
先由 ϕ_N, ϕ_S 插值得出 $\phi_{P_1'}^C, \phi_{P_2'}^C$

再由 $\phi_{P_1'}^C, \phi_{P_1}^f$ 插值得 $\phi_{P_1}^{f_1}$

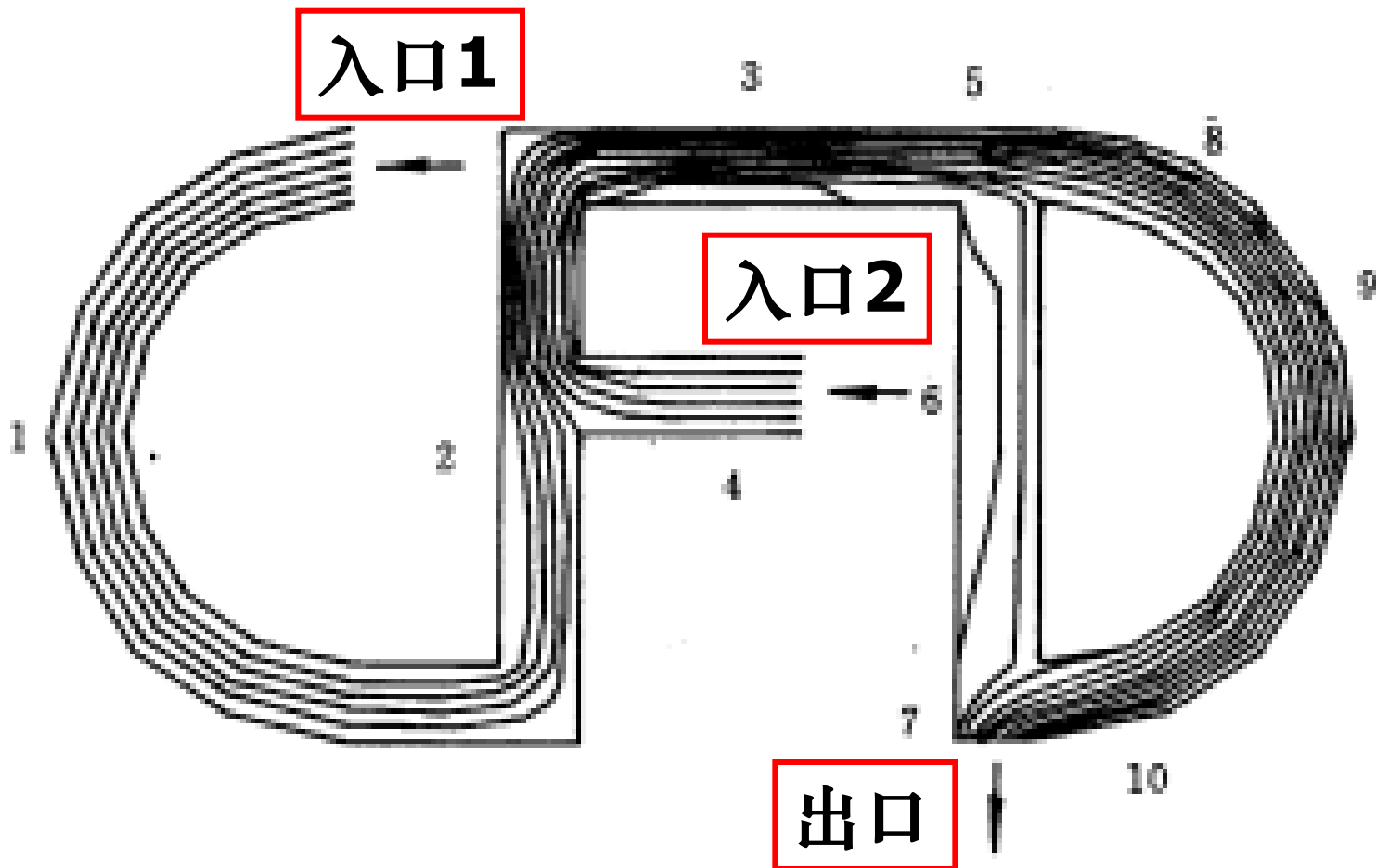
对疏网格在交接面处的热流密度由密网格获得：

$$\Delta \eta^C q^C = \sum \Delta \eta_i^f q_i^f$$

在界面上信息需要交换，密网格边界值不能只从密网格插值获取！



应用举例：



Lai YG, Jiang Y, Przekwas A J. AIAA 93-0541, 1993

2.4.2 拼片式网格界面上压力修正值信息传递

采用**SIMPLE**算法计算疏密网格区的流场时，疏密网格界面上压力修正值 p' 的信息传递属于以**N-N**型。以下说明信息传递应注意之点。

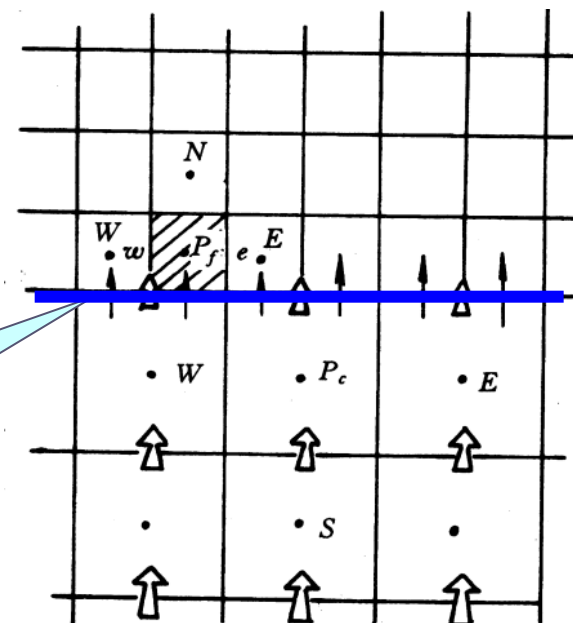
对密网格的 P_f 控制容积：

$$A_P p'_P = A_E p'_E + A_W p'_W + A_N p'_N + A_S p'_S + b$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N, A_S = 0$$

$$b = (\rho U^*)_e - (\rho U^*)_w + (\rho V^*)_n - (\rho V^*)_s$$

疏密网格界面



对密网格的 P_f 控制容积则有: $A_s = 0$

因此按照常规的**SIMPLE**算法处理时在界面上是**N-N**计传递, 疏密网格的压力场会存在相差一个常数的不确定性, 可以通过在界面上从两侧计算的总动量应该平衡来调整:

以截面一侧的总动量为依据, 通过调整另一侧的压力绝对值, 使该侧块界面上的总动量与作为依据的总动量相等。

Shyy W, Ouyang H, Blosch E, Thakur SS. Computational techniques for complex transport phenomena. Cambridge:Cambridge University Press, 1998

界面插值注意：对密网格南界面有

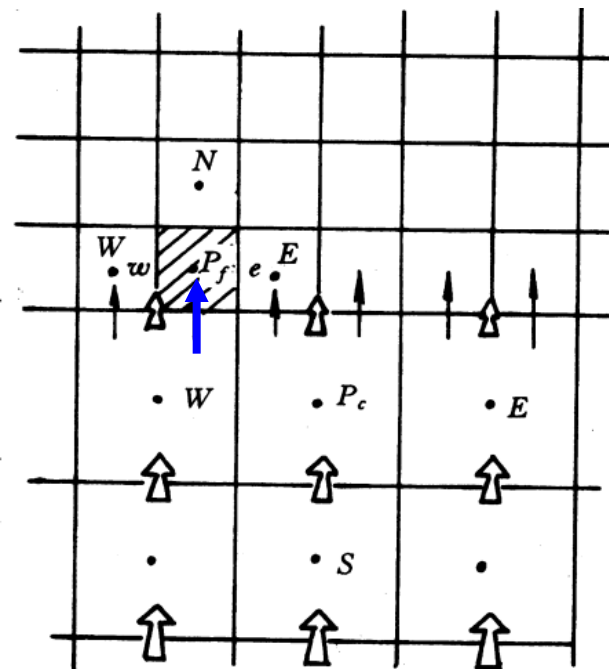
$$b = (\rho U^*)_e - (\rho U^*)_w + (\rho V^*)_n - (\rho V^*)_s$$

其中需要南界面的流速 V^* 。

按网格生成技术：

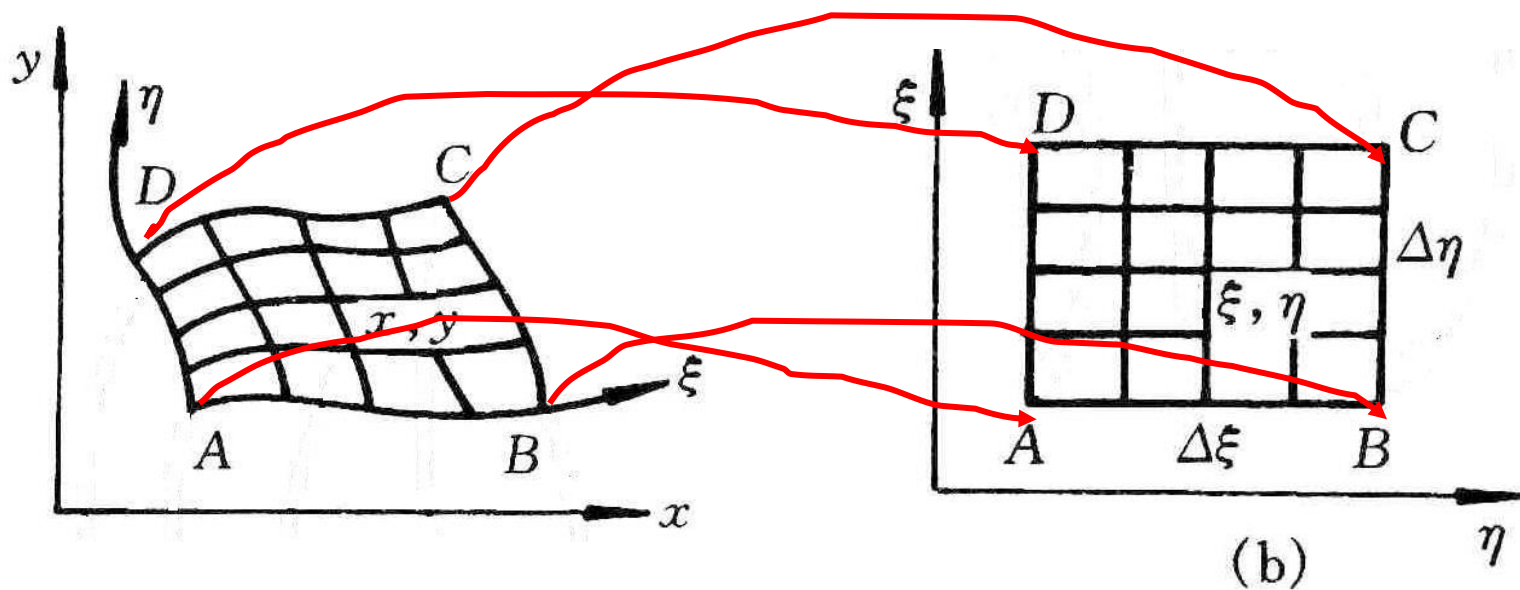
$$V = vx_\xi - uy_\xi$$

其中 u, v 需要从**疏网格**插值得到。
但是 x_ξ, y_ξ 这样的几何参数必须从**密网格**获得！



计算平面坐标为 $\xi-\eta$ ，物理平面坐标 $x-y$

将 $\xi-\eta$ 看成是计算平面上一个直角坐标的两个轴，
则物理平面不规则计算区域即转换为计算平面矩形域；



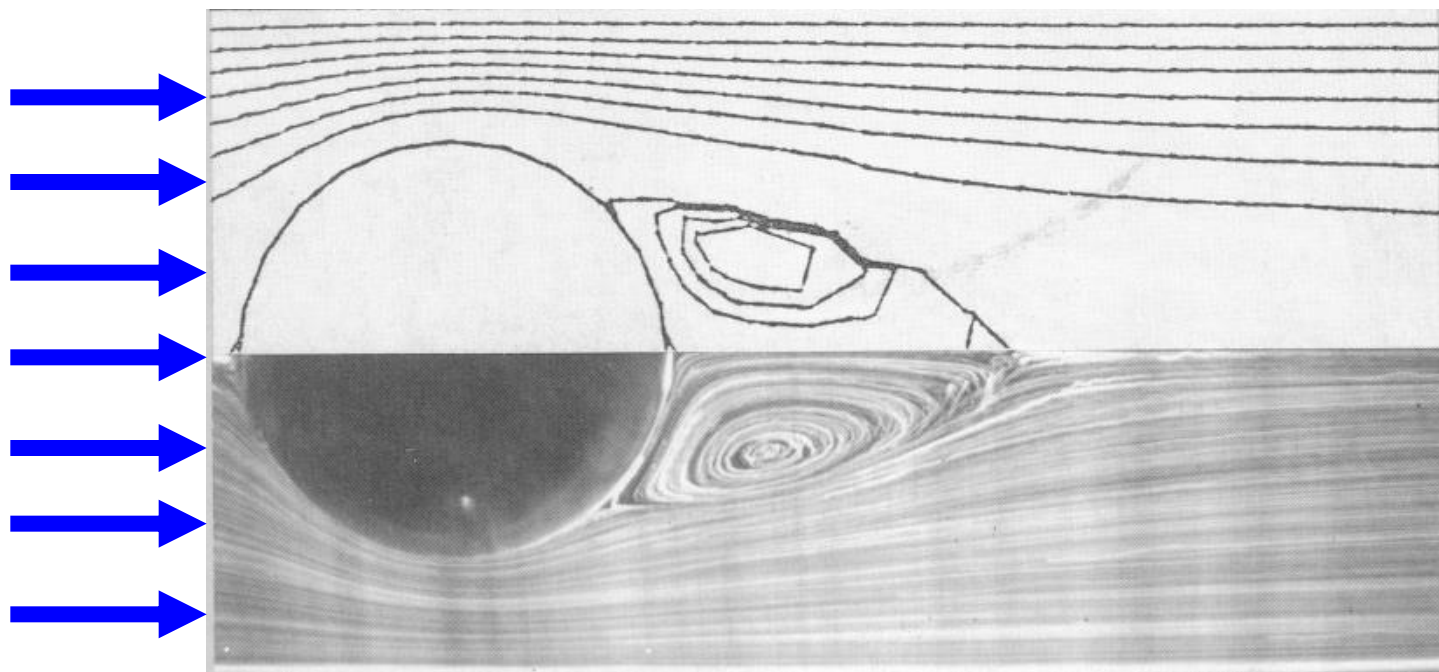
对于每一对物理-计算坐标，相互间有转换关系，
但是不同的坐标对则相互间毫无关系。

几何参数由每个块网格自身的物理-计算区域的几何结构决定的，不同块之间无任何联系；不象物理量的场疏密网格之间是连续的。因此，界面流速 V 中 u, v 可按疏网格的值插值，而几何参数则必须在密网格内予以插值获得。

疏密网格间信息的传递插值仅发生在连续的物理量场中，对于几何参数，只能在各自的网格内进行插值。

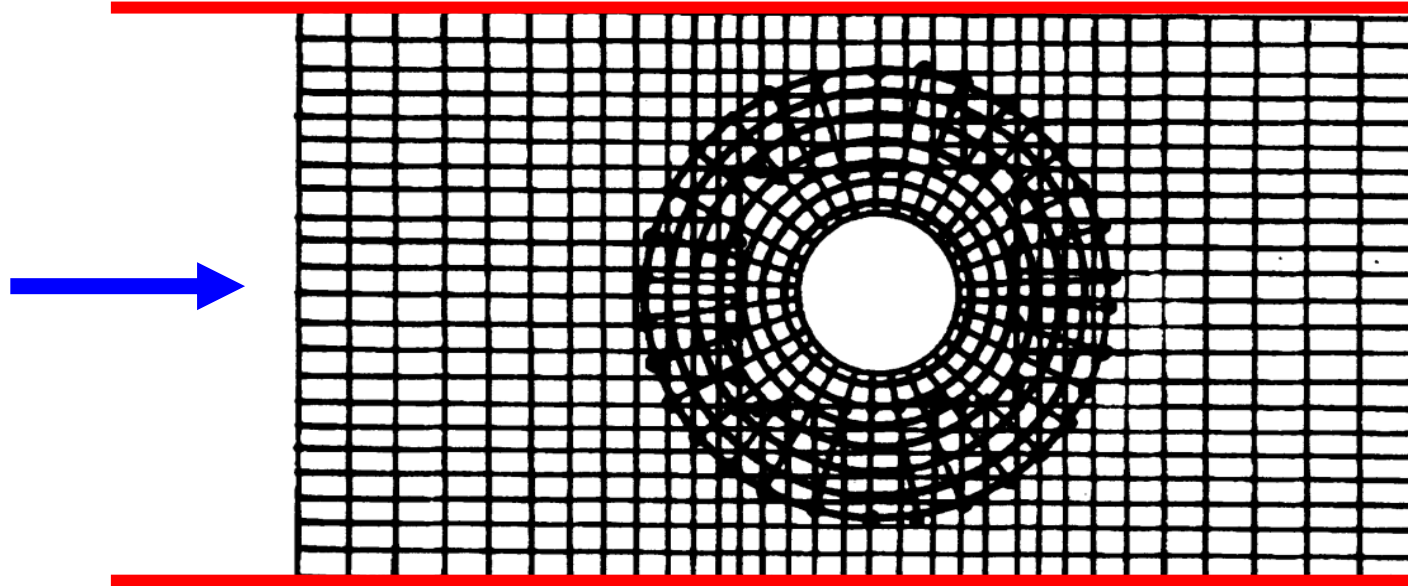
2.4.3 搭接式块结构化网格界面信息传递方法

用搭接式网格计算平行通道中外掠圆柱体的流动-
---计算流体力学最基本的问题之一，**1933年**英国科学家 **Thom** 第一人用有限差分法求解。



Re=162 时外掠圆柱体的流动

应用块结构化网格是处理区域不规则性的有效方法。



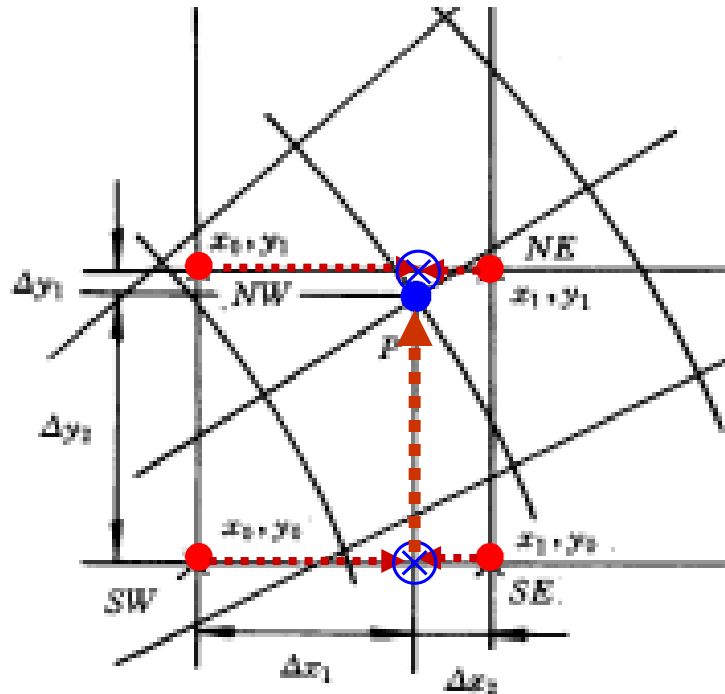
两种坐标重叠区数据的传递是关键。一般采用**D-D型**传递方式:两个区域的计算结果互相插值,一个区的计算结果为另一区域提供第一类边界条件。

1. 采用双线性插值

1) 从直角坐标的 ϕ_{NB}^{ca} 双线性插值到极坐标的 ϕ_P^{cy}

$$\phi_P^{(cy)} = \frac{[(\phi_{NE}^{(ca)} \Delta x_1 + \phi_{NW}^{(ca)} \Delta x_2) \Delta y_2 + (\phi_{SE}^{(ca)} \Delta x_1 + \phi_{SW}^{(ca)} \Delta x_2) \Delta y_1]}{(\Delta x_1 + \Delta x_2)(\Delta y_1 + \Delta y_2)}$$

两次应用交叉相乘的原则。



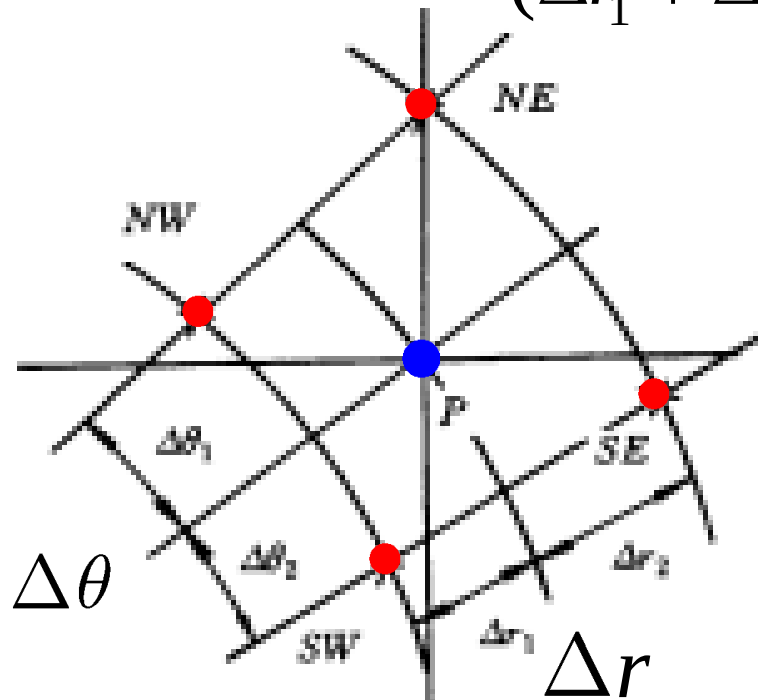
*cy – cylindrical;
ca – cartesian;
NB – neighbor*

2 × 2 插值图案(stencil)

2) 从极坐标**双线性**插值到直角标

两次应用**交叉相乘**的原则。

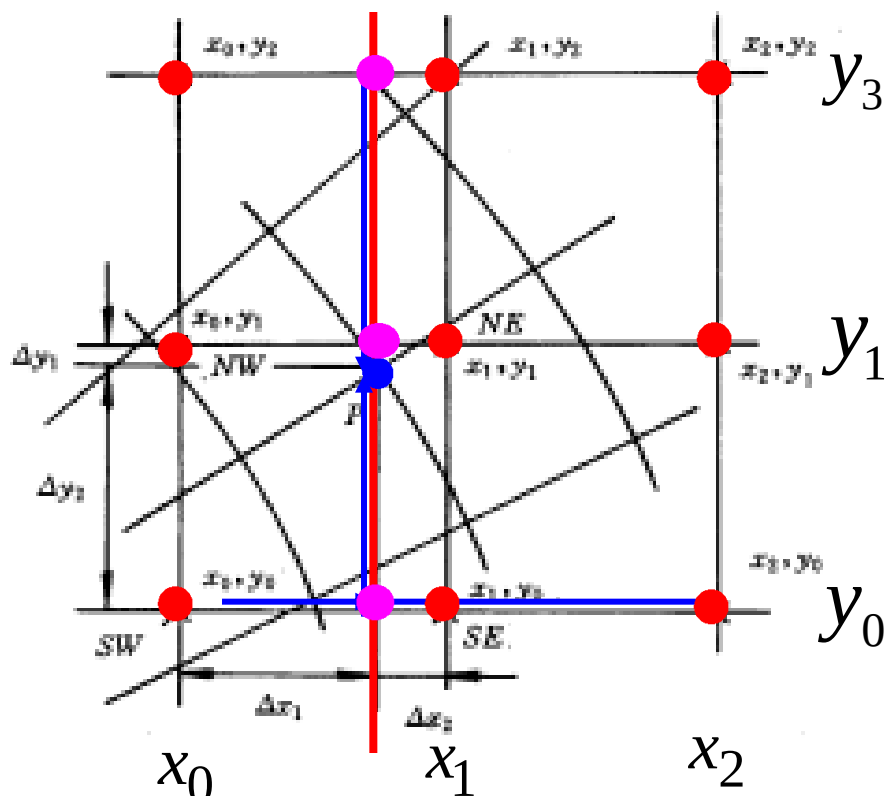
$$\phi_P^{(ca)} = \frac{[(\phi_{NE}^{(cy)} \Delta r_1 + \phi_{NW}^{(cy)} \Delta r_2) \Delta \theta_2 + (\phi_{SE}^{(cy)} \Delta r_1 + \phi_{SW}^{(cy)} \Delta r_2) \Delta \theta_1]}{(\Delta r_1 + \Delta r_2)(\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2)}$$



2 × 2 插值图案(stencil)

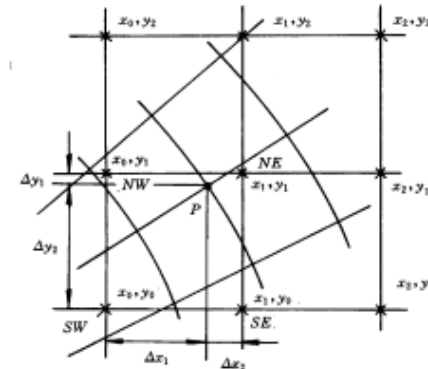
2. 采用双二次插值（以从直角坐标到极坐标为例）

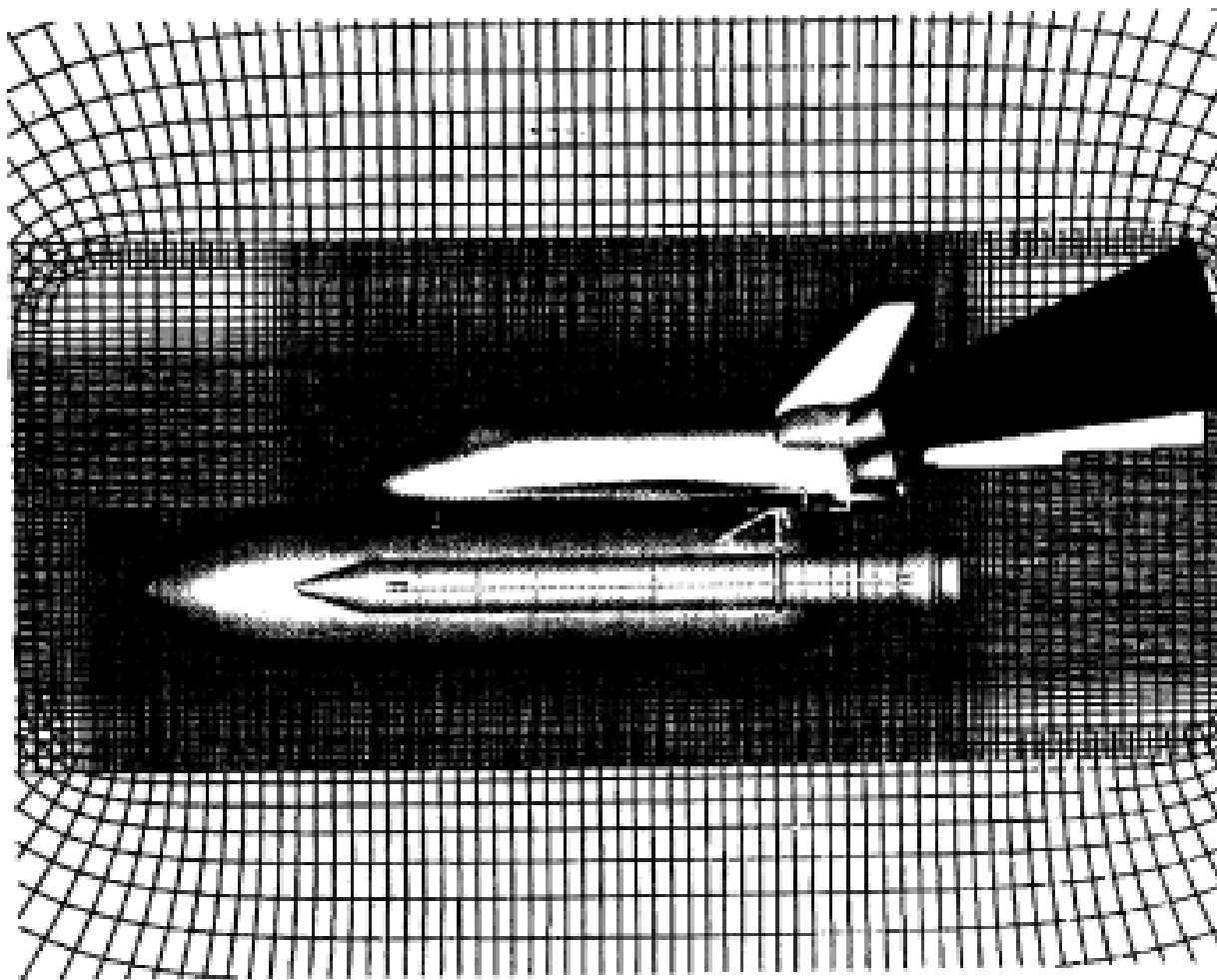
从直角坐标到极坐标： 先在 y_0, y_1, y_2 三条线上对 x 做二次插值；再将三个插值结果对 y 做二次插值。



3 × 3 插值图案(stencil)

$$\begin{aligned} \phi_P^{(cy)} = & \left\{ \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \right] \phi_{x_0, y_0}^{(ca)} + \left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \right] \phi_{x_1, y_0}^{(ca)} + \left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right] \phi_{x_2, y_0}^{(ca)} \right\} \times \\ & \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)} + \\ & \left\{ \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \right] \phi_{x_0, y_1}^{(ca)} + \left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \right] \phi_{x_1, y_1}^{(ca)} + \left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right] \phi_{x_2, y_1}^{(ca)} \right\} \times \\ & \frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)} + \\ & \left\{ \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \right] \phi_{x_0, y_2}^{(ca)} + \left[\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \right] \phi_{x_1, y_2}^{(ca)} + \left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right] \phi_{x_2, y_2}^{(ca)} \right\} \times \\ & \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)} \end{aligned}$$





搭接网格应用举例

Mavriplis D J. Mesh generation an adaptivity for complex geometries and flows. In: Peyret R ed. Handbook of computational fluid mechanics. Lodon:Academic press, 1997, pp.417-459

2.5 非结构化网格简介

2.5.1 非结构化网格的基本思想

2.5.2 非结构化网格的分类

2.5.3 生成非结构化网格的研究重点

2.5.4 非结构化网格中节点的两种设置方式

2.5 非结构化网格简介

2.5.1 非结构化网格的基本特点

节点与节点间的关系没有固定的原则可循，节点与节点及节点与单元间的联系信息必须予以存储，每个单元与其周围单元的关系以及单元位置不能简单地通过递推来决定的网格系统。

2.5.2 二维非结构化网格的分类

1.按方法分：主要—**Delaunay**三角形法，前沿推进法

2.按元体分：包括二维空间的三角形、任意四边形和

多边形单元，三维空间中的四面体、任意六面体及多面体单元。

2.5.3 生成非结构化网格的研究重点

网格生成的一般命题是：已知计算区域及其边界上的节点分布，需确定计算区域内的节点位置及其相互间的连接关系：

1.如何向计算区域内布置节点？

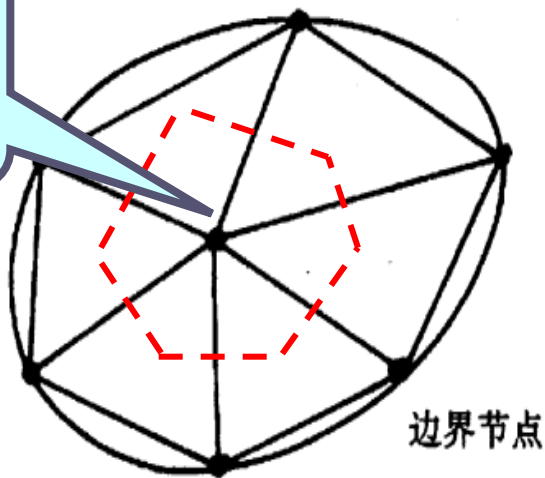
2.如何连接这些节点，确定节点间联系信息？

3.如何高效地存取节点间的联系信息？

2.5.4 非结构化网格中节点的两种设置方式

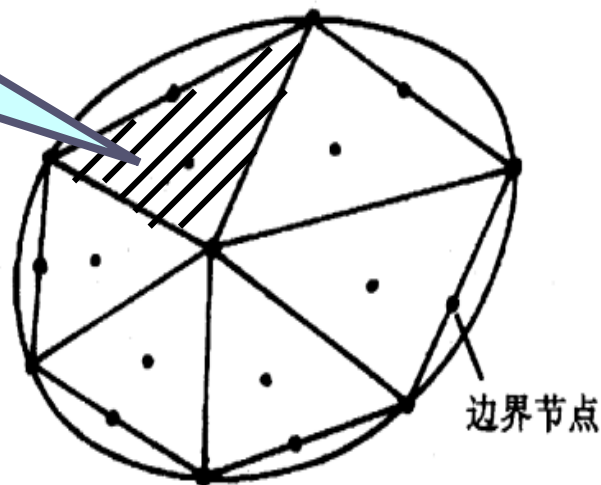
1. 单元顶点法 (cell vertex)

控制
容积



2. 单元中心法 (cell centered)

控制
容积



对同一问题的对比研究表明两种方法的数值特性基本相同，但单元中心法离散过程较为简单。

2.6 Delaunay三角形化的方法

2.6.1 什么叫做Delaunay三角形化

2.6.2 采用Delaunay三角形化方法生成二维非结构化网格的基本问题

2.6.3 实现Delaunay三角形化的基本方法(Bowyer方法)

2.6.4 实现边界匹配的初始三角形化方法

2.6 Delaunay三角形化的方法

2.6.1 什么叫做Delaunay三角形化

1.所谓Delaunay三角形化是将平面上一组已知的点连接成一组三角形的方法，这些三角形有如下特点：

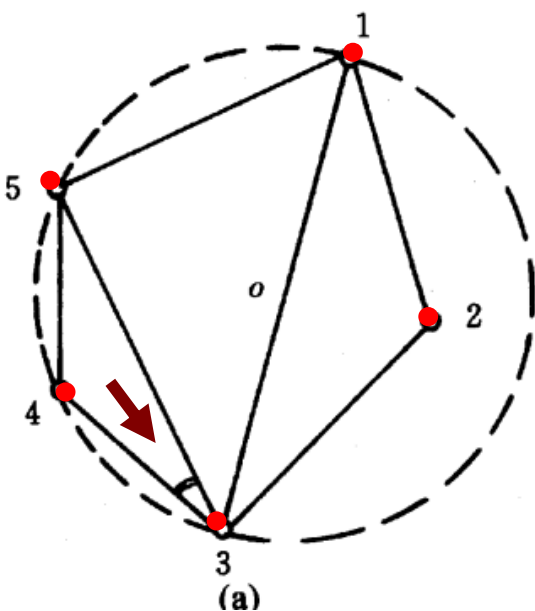
1) 互不重叠；

2) 覆盖整个给定的区域；

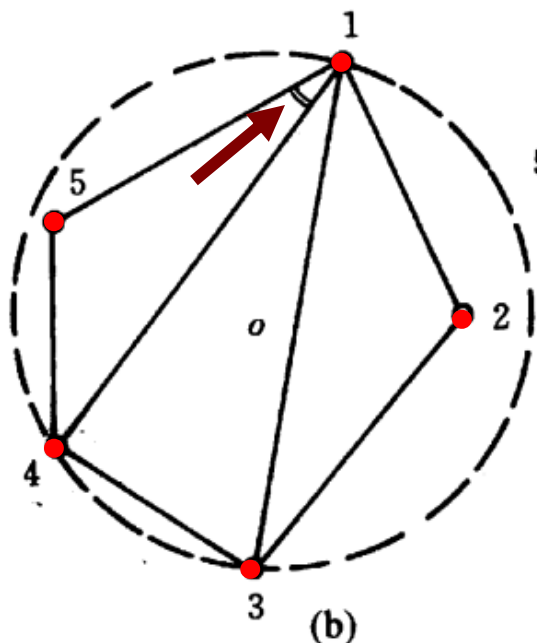
3) 每个点都不位于不包含该点的三角形的外接圆内（空圆性）；

4) 所生成这组三角形的最小角是各种可能连接方案中的最大者（max-minimum angle）（最大最小角）。

一般地，对任一组点可以连接多组三角形，但只有一种连接方法，其中最小角达到最大值，并具有空圆性。

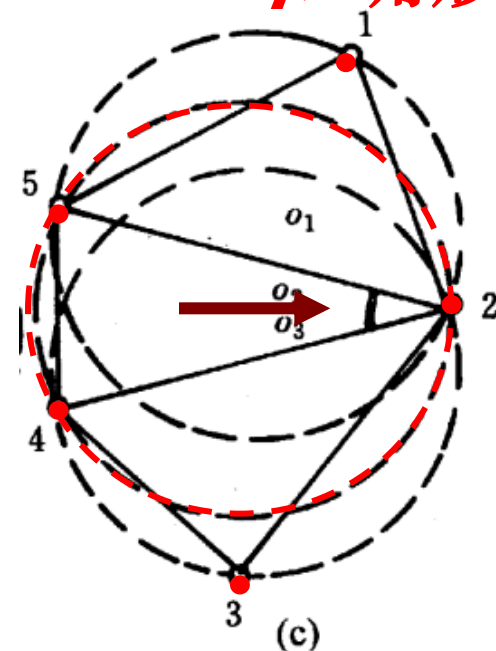


最小角 $\angle 435$
无空圆性



最小角 $\angle 514$
无空圆性

Delaunay三角形



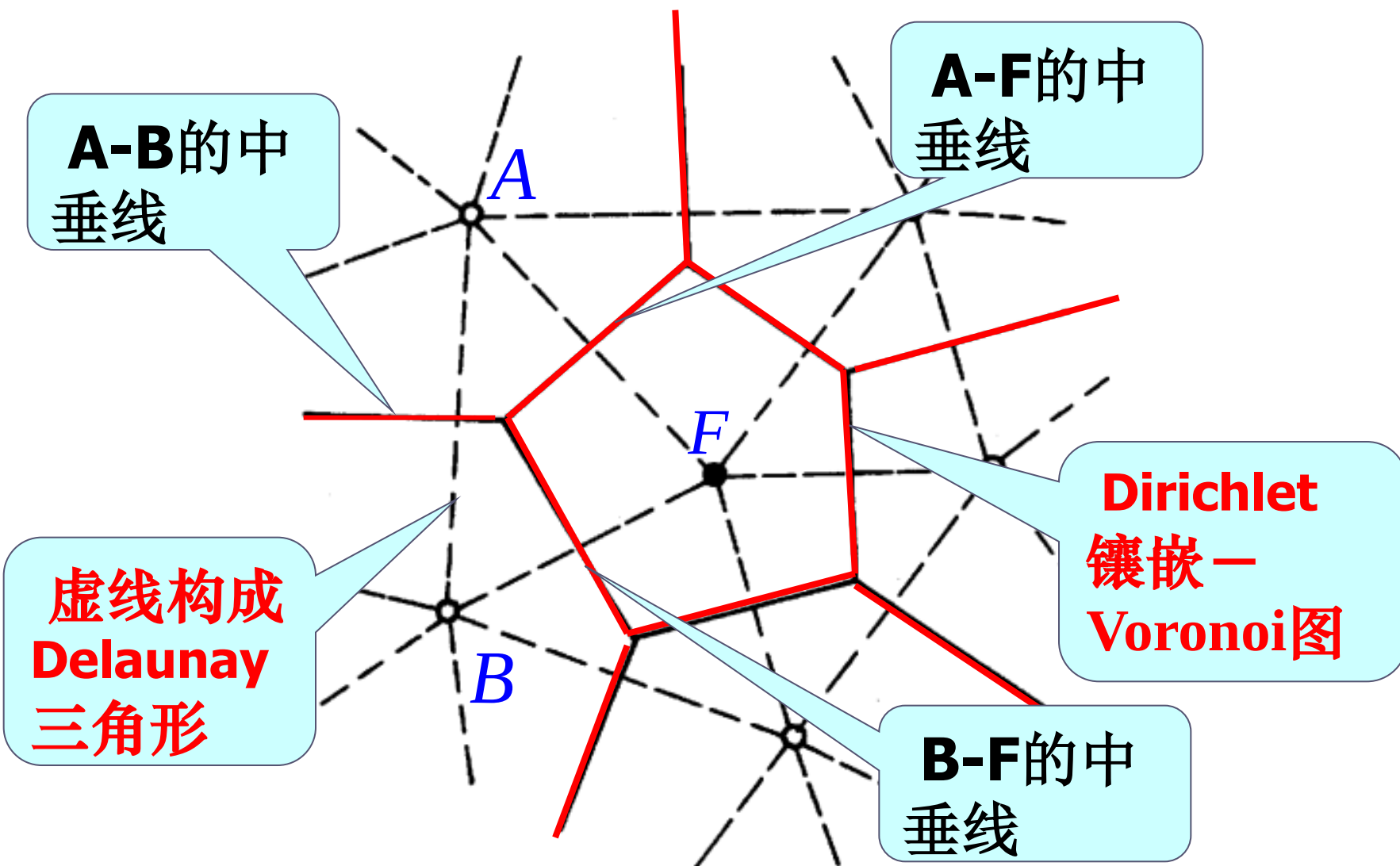
最大最小角 $\angle 524$
具有空圆性

2. Dirichlet 镶嵌 (**tessellation**)

1850年：给定平面上的一组点，生成一组突多边形，使每个突多边形只包含一个点，该多边形称为该点的领域 (**territory**)；每个领域对其内点的靠近程度均比对其它点更加密切。这样一组突多边形称为**Dirichlet 镶嵌**，又称**Voronoi图**。

3. Dirichlet 镶嵌与Delaunay三角形的关系

Voronoi图中的突多边形的每一条边都是一对点连线的中垂线；**由这样的一对对点的连线所构成的三角形就是Delaunay三角形。**



Dirichlet 镶嵌与Delaunay三角形的关系

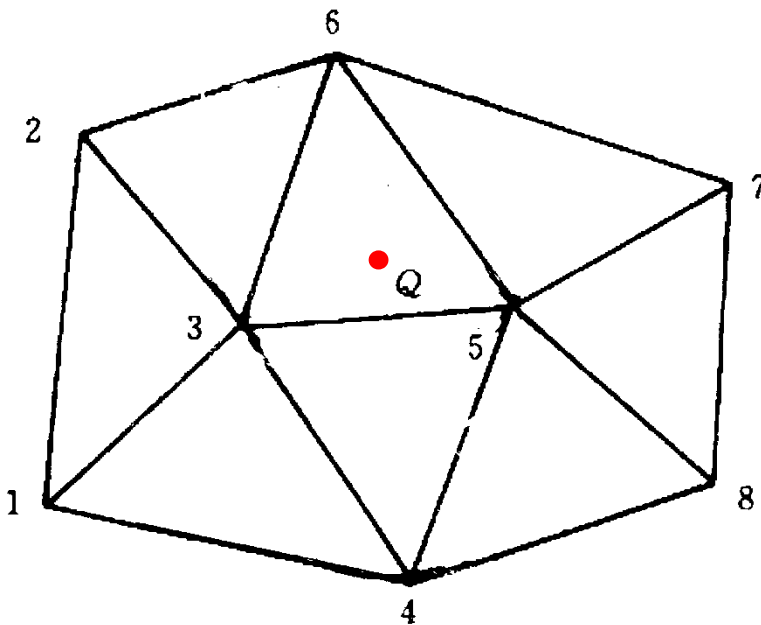
2.6.2 采用Delaunay三角形化方法生成二维非结构化网格的基本问题

1. 对给定的一组点如何连接才能生成Delaunay三角形？
(联点问题)
2. 对给定的计算区域与边界上的已知节点，如何向区域内部布点？ (布点问题)
3. 如何确保采用Delaunay三角形化生成的一组三角形的外边界就是计算区域的外边界？ (边界匹配)

2.6.3 实现Delaunay三角形化的基本方法(Bowyer方法)

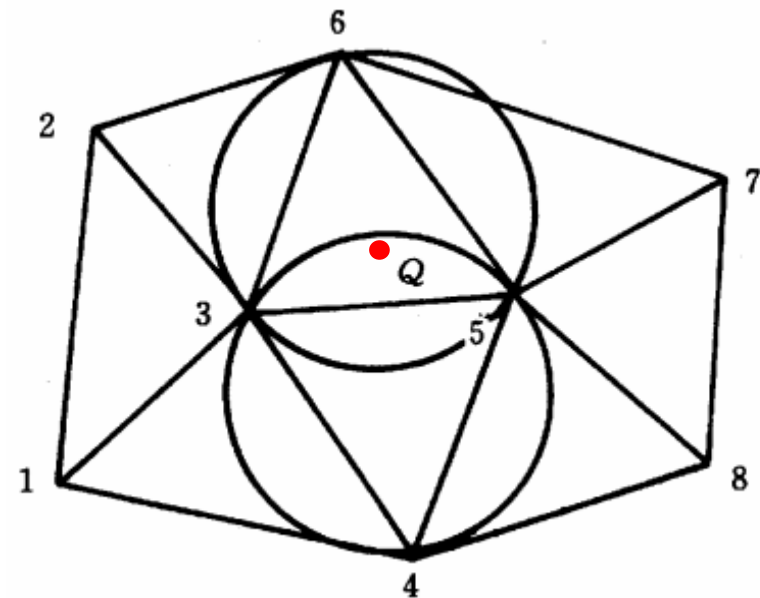
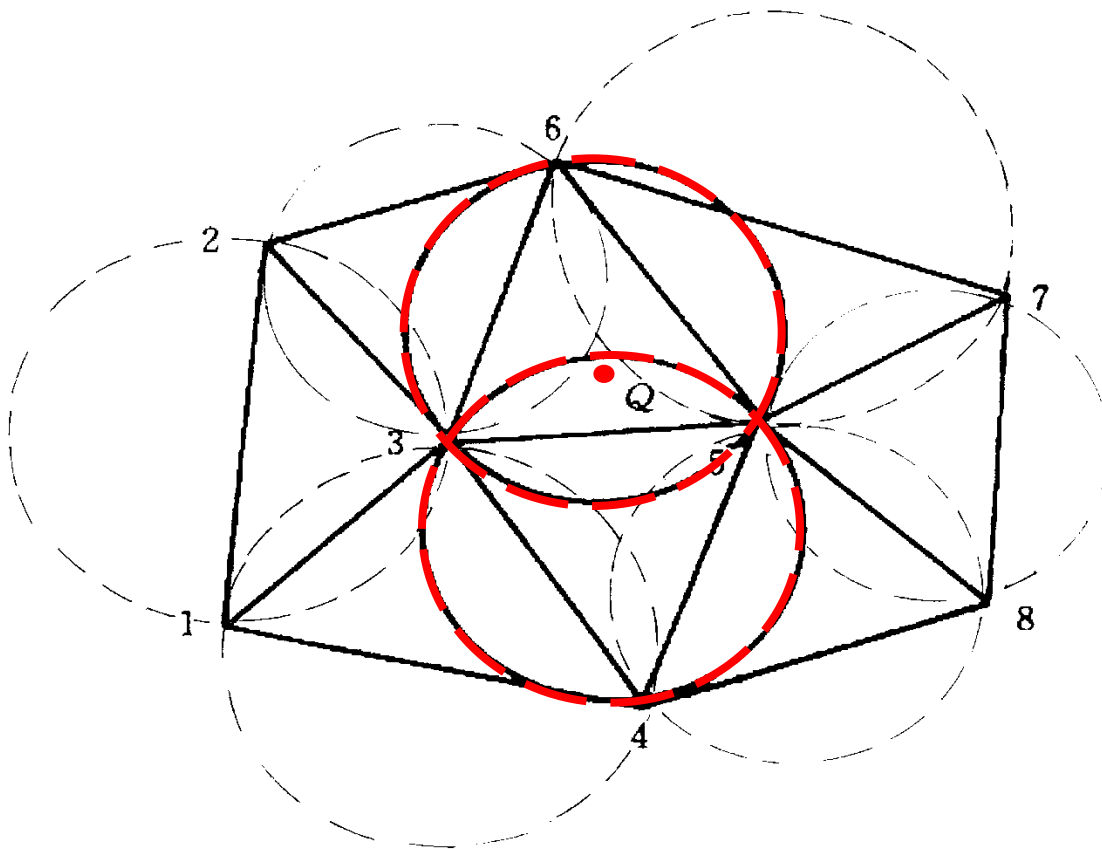
基本思想：假设已经有了一组Delaunay三角形，以及该三角形组内的任一点Q，如何连接Q点与其它点以构成一组新的Delaunay三角形？（联点问题）

Bowyer方法充分利用Delaunay三角形的空圆性：



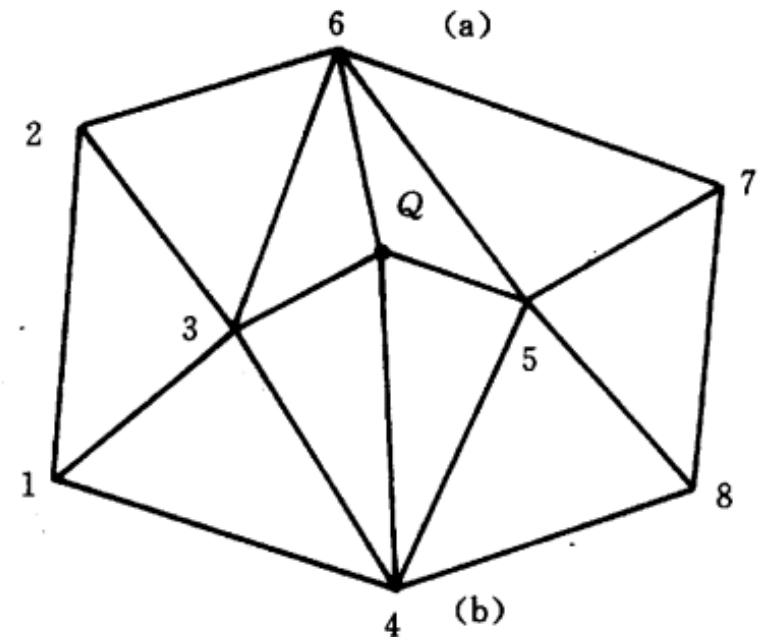
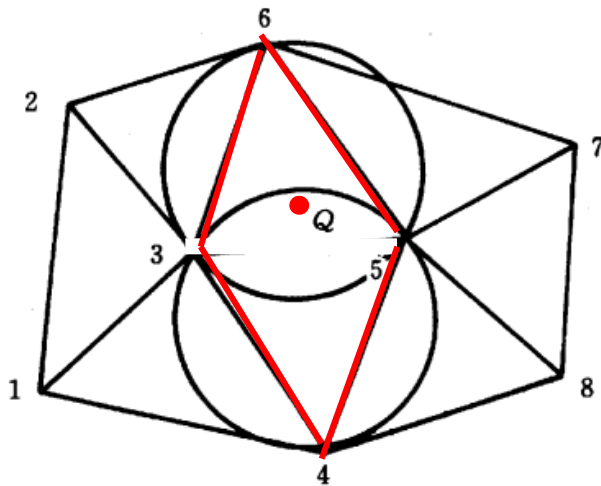
1. 对每个给定的三角形做外接圆;

2. 找出外接圆包括 Q 在内的所有三角形: $\triangle 356$ $\triangle 354$



**3. 消去所有外接圆包括Q点的公共边，3-5，
形成一个空腔，3456，称为 Delaunay 空腔；**

4. 联接Q点与Delaunay空腔3456的各个顶点，就构成一组新的Delaunay三角形。（20170419）



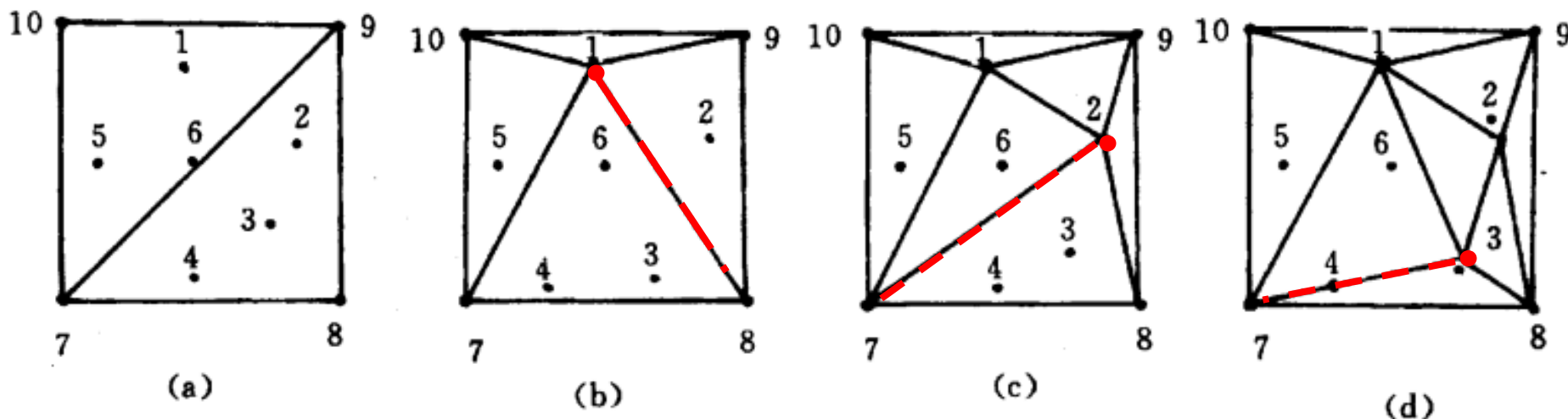
2.6.4 实现边界匹配的初始三角形化方法

1.基本思想：进行网格生成时，一般都给出计算边界上的节点布置（它可以满足我们对所要生成网格的一些要求）；所谓初始化三角形化就是以这一组给定的边界节点为顶点生成**Delaunay**三角形，形成一组初始**Delaunay**三角形，然后再向区域中布点，这样边界匹配问题自然解决。（匹配问题）

2. 举例：

问题：为了应用Bowyer方法需要一组初始**Delaunay**三角形，它从何而来？

包含此6点的两个等边直角三角形即为Delaunay三角形

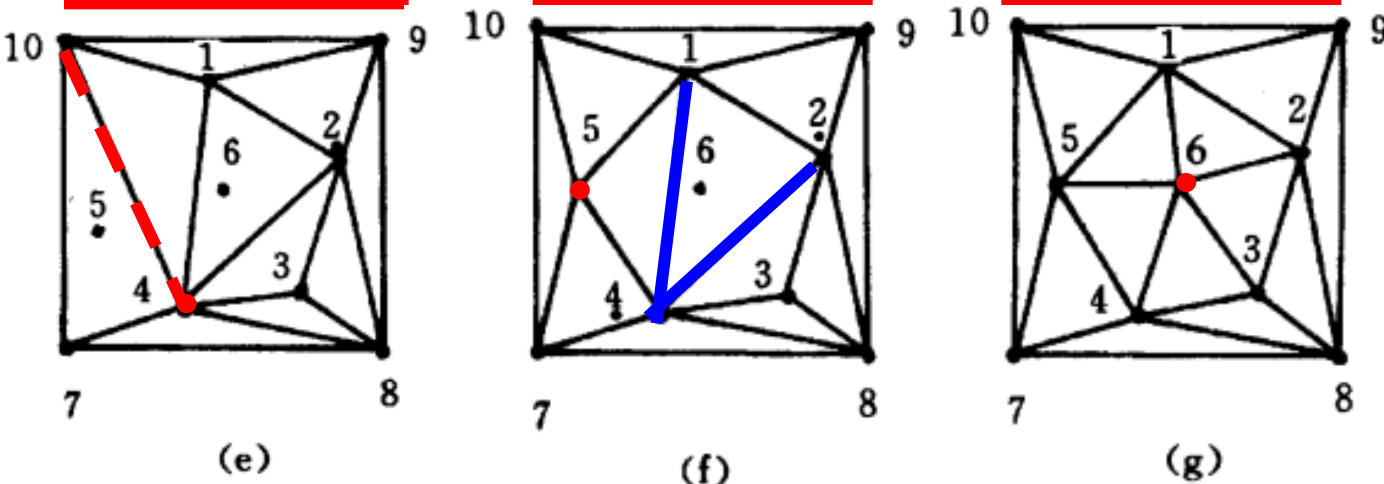


给点6实施

对点2实施

对点3实施

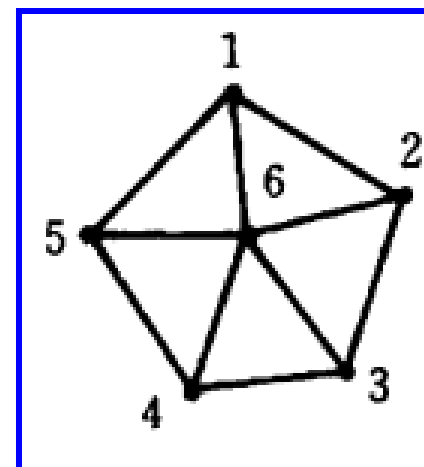
对点4实施

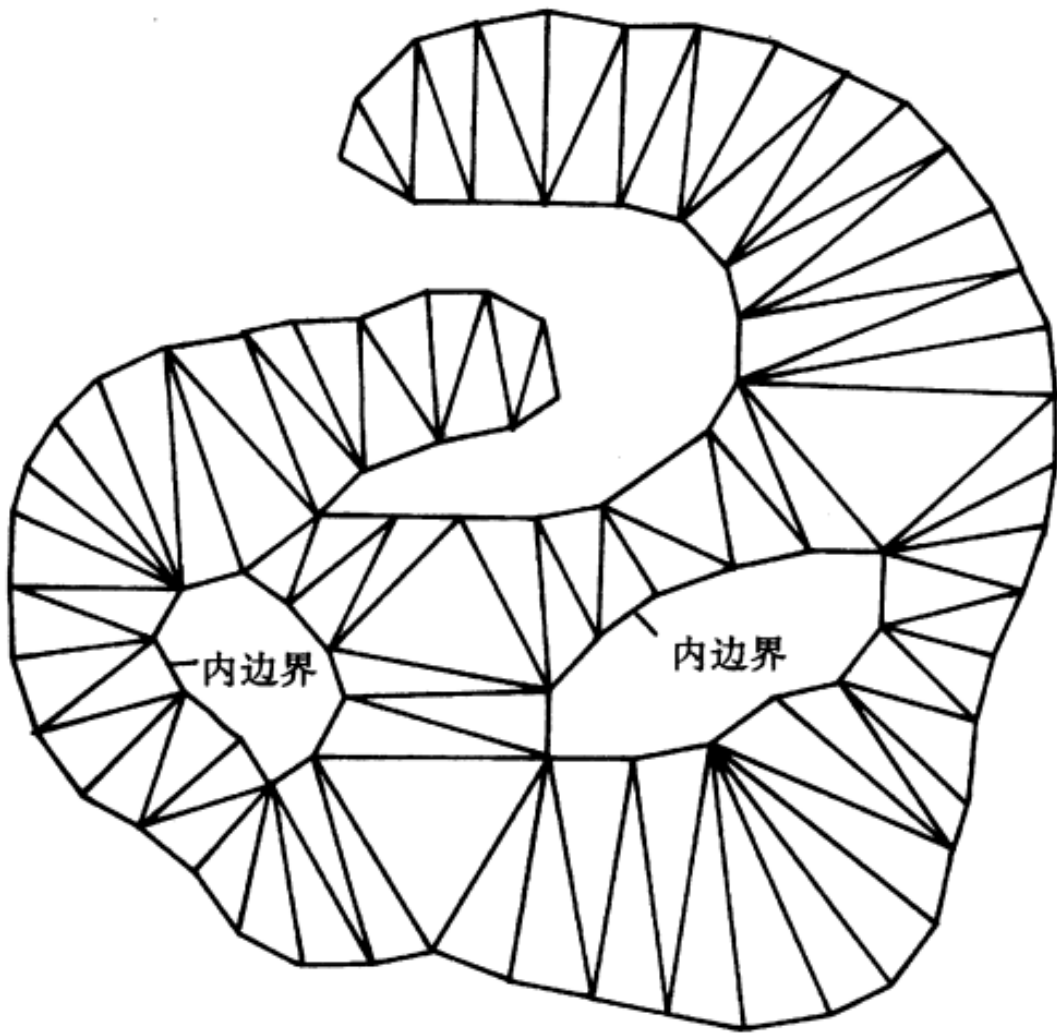


对点5实施

对点6实施

消去域外三角形





复杂区域初始化Delaunay三角形举例

2.7 向计算区域内布点的方法

2.7.1 对网格生成方法的一般要求

2.7.2 为改善网格特性而引入的两个参数

2.7.3 自动向计算区域内布点的一种实施方法

2.7.4 网格局部加密方法

2.7.5 网格生成后的光顺处理

2.7.6 几点说明

2.7 向计算区域内布点的方法

2.7.1 对网格生成方法的一般要求

1. 边界上给定的节点疏密分布能够光滑地向区域内部传递；
2. 能自动地按一定要求向区域内部布点；
3. 生成的三角形尽可能接近正三角形；
4. 便于实施局部加密。

2.7.2 为实现上述要求而引入的两个参数

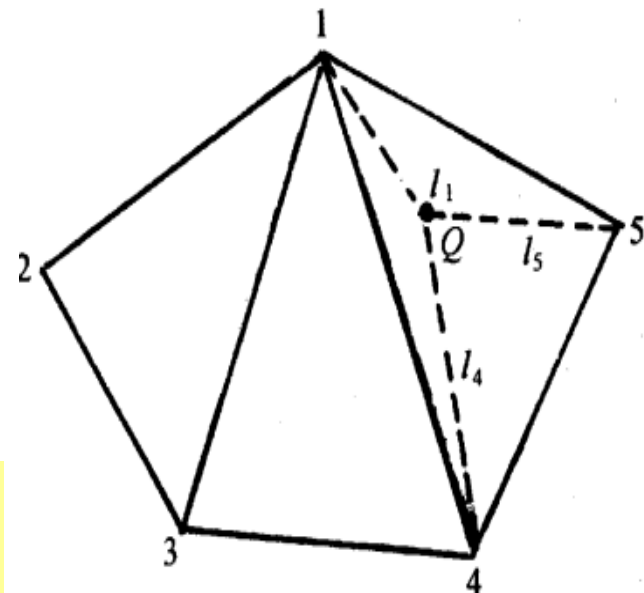
1. 长度标尺 L (length scale)

定义： 对边界节点：到相邻两边界节点间的平均距离的 $\sqrt{3}/2$ 倍；

对内节点：按下列**倒数 (reciprocal)** 公式计算：

$$L(Q) = \frac{L(1)/l_1 + L(4)/l_4 + L(5)/l_5}{1/l_1 + 1/l_4 + 1/l_5}$$

目的： 使边界上规定的节点疏密特性能光滑地向内部传递；对内节点按倒数公式计算—距离的倒数起到加权的作用：**距离越大，权越小。**



2. 三角形无量纲外接圆半径 R (**dimensionless circumcircle radius**)

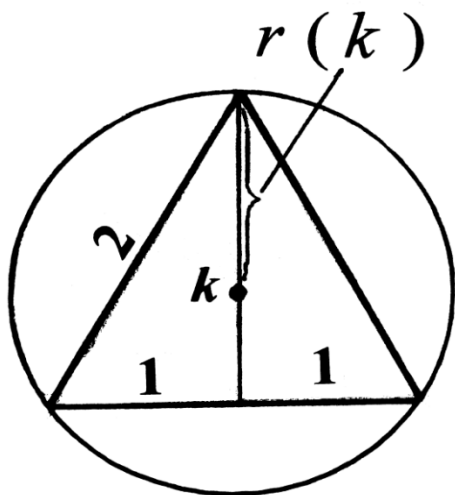
定义:

$$R(k) = \frac{r(k)}{L(k)}$$

三角形外接圆半径

三角形外接圆圆心 k 的长度标尺

对正三角形: 其外接圆圆心的长度标尺就是边界点的长度标尺:



三角形外接圆半径

$$R(k) = \frac{\sqrt{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{2}} = \frac{2}{3} < 1$$

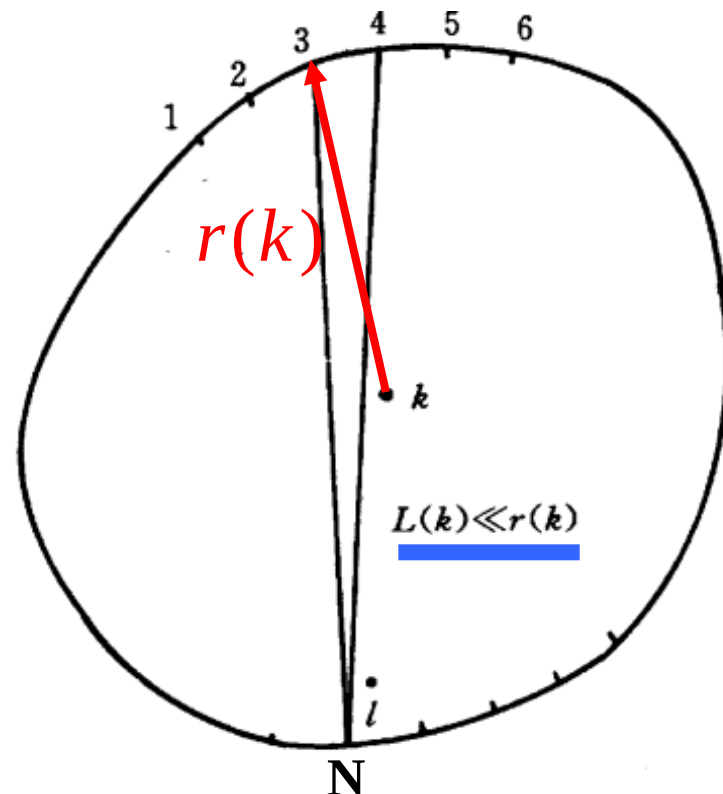
相邻两点间的边长

三角形外接圆圆心 k 的长度标尺

目的： 正三角形 $R(k) < 1$ ，可作为表征三角形接近正三角形的一种度量。

当所生成的三角形偏离正三角形很远时， $R(k)$ 之值必远大于1：

k 点的长度标尺接近于弦长3-4，远小于外接圆半径 $r(k)$ 。



$$L(k) = \frac{L(3)/l_3 + L(4)/l_4 + L(N)/l_N}{1/l_3 + 1/l_4 + 1/l_N} \approx \overline{3-4} \ll r_k$$

2.7.3 自动向计算区域内布点的一种实施方法

设已经生成一组 N 个与边界相匹配的初始Delaunay三角形，要向内部加点：

1. 计算所有 N 个初始三角形的外接圆半径 $r(k)$;
2. 应用倒数原则计算所有初始三角形外接圆圆心的长度标尺， $L(k)$, $k=1,2,\dots,N$;
3. 计算所有初始三角形的无量纲外接圆半径， $R(k)$, $R(k)=r(k)/L(k)$, $k=1,2,\dots,N$;
4. 对已有的三角形按 $R(k)$ 大小排序，最大者处于序列之首；

5. 对序列之首的三角形在其外接圆心处加一点Q;

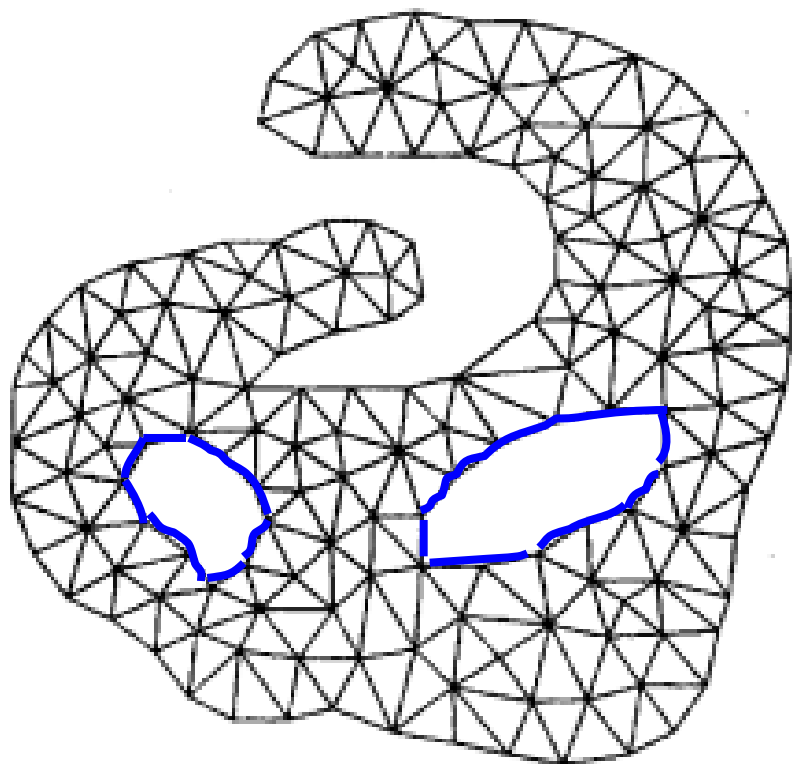
6. 利用Bowyer法将Q点与Delaunay空腔之顶点连接组成新的Delaunay三角形;

7. 重复1—6，直到位于序列之首的三角形的 $R(k)$ 满足一定条件，如 $R(k) < 1$ 。

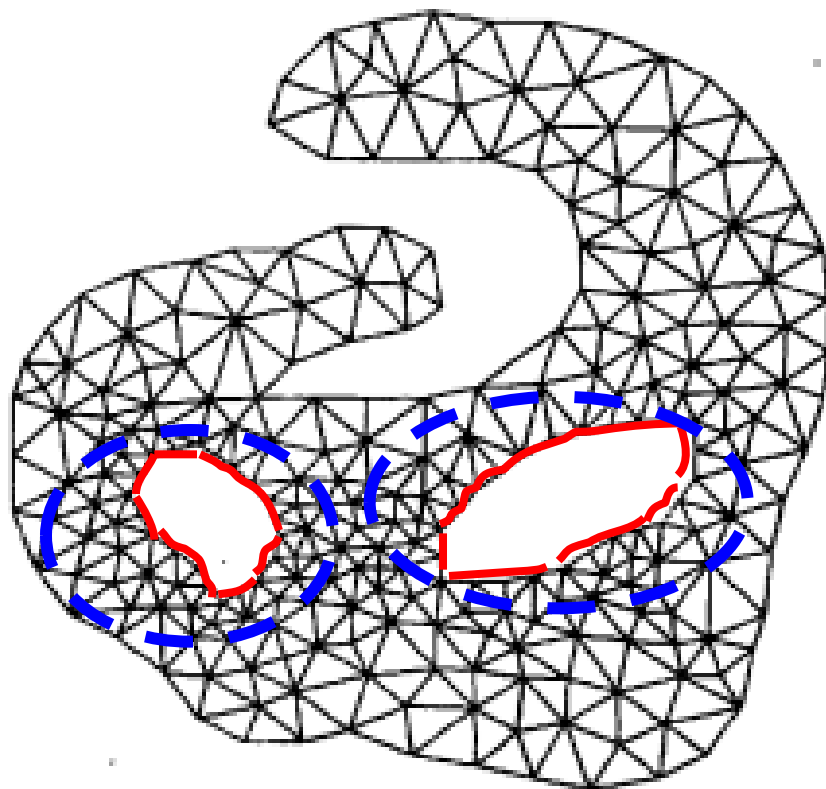
上述实施方法可基本上满足非结构化网格生成的前三个要求；第4个要求可利用长度标尺来实现。

2.7.4 网格局部加密方法

1. 通过加密边界网格来实现;



内边界加密前



内边界加密后

通过加密边界网格实现

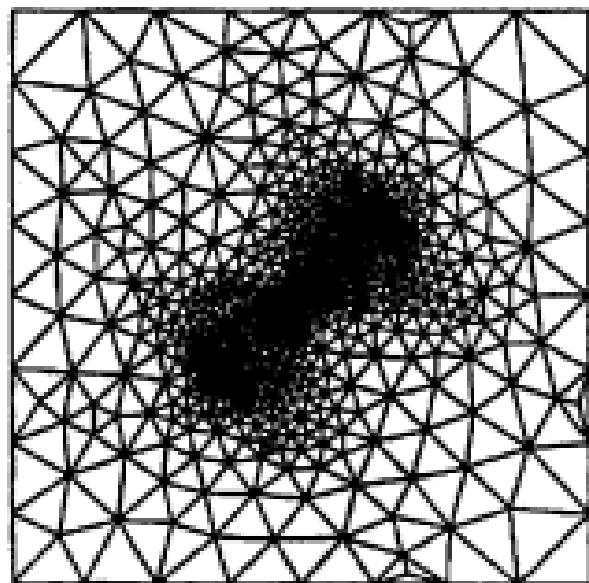
2. 通过设置内部源项来实现：

(1) 在要加密地区选定一个或一组点（源项），并规定其长度标尺（远）小于边界节点的平均值；

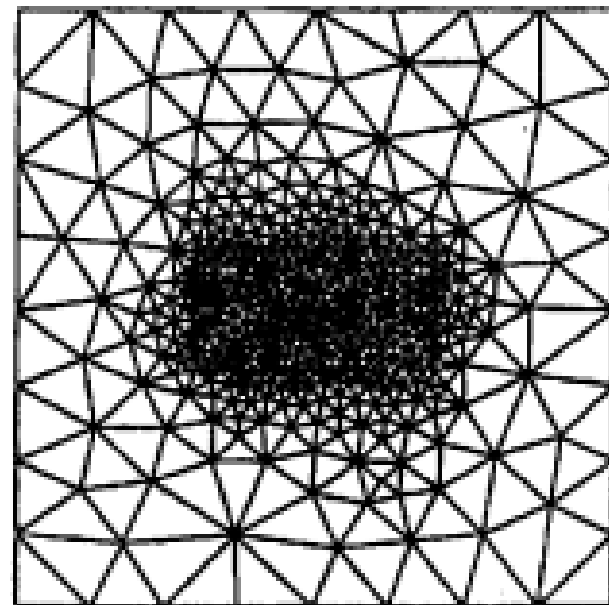
(2) 将这些内点按边界节点处理参与初始Delaunay三角形的生成；

(3) 在确定长度标尺时源项节点的标尺不采用倒数原则而按规定值输入；

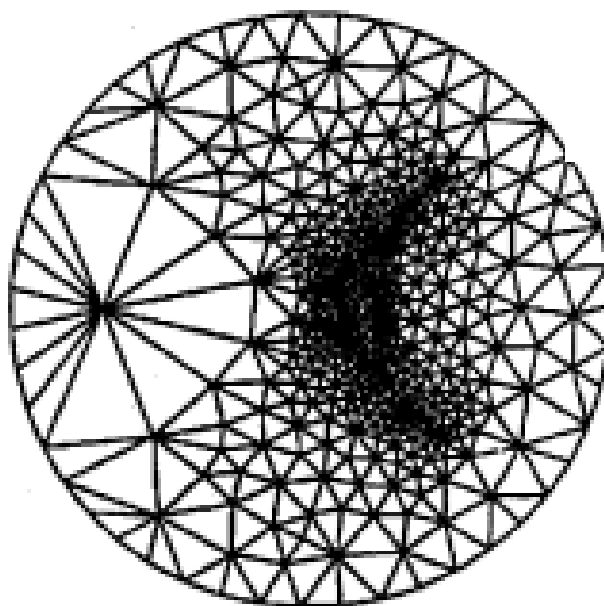
(4) 按上述方法向内部加点，所形成网格在源项节点附近一定稠密。



(a) 点源



(c) 块源



(b) 线源

2.7.5 网格生成后的光顺处理 (**smoothing**)

1. 移动节点位置使之尽量处于共享的三角形的中心 (Laplace 光顺法) ；

$$(x_i, y_i)^{new} = (x_i, y_i)^{old} + \frac{\omega}{N} \sum_{k=1}^N [(x_k, y_k) - (x_i, y_i)]$$

节点新位置

节点老位置

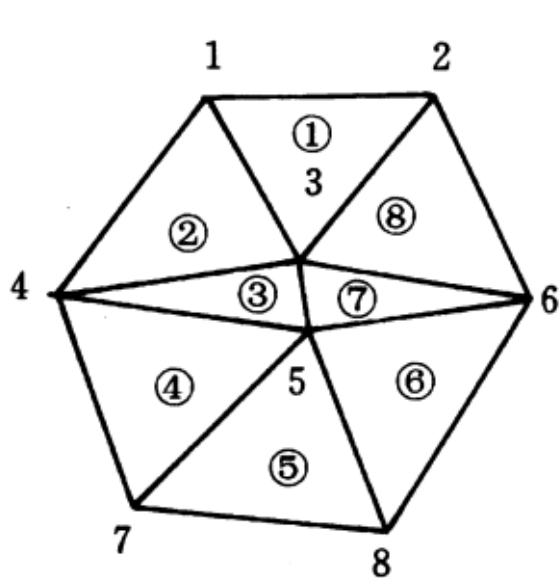
松弛因子

共享的顶点数

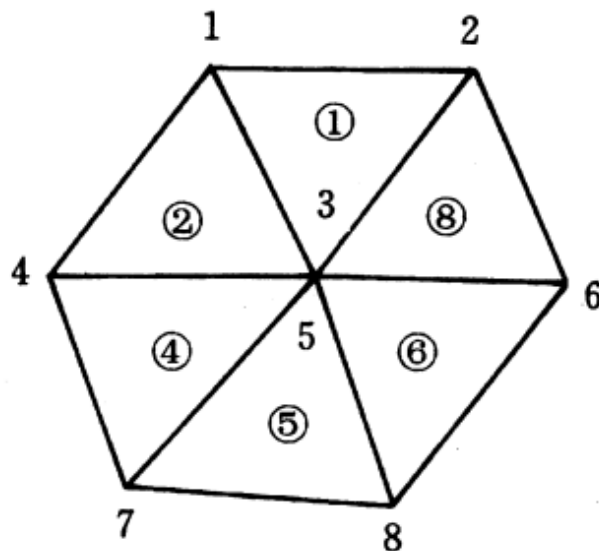
邻点位置

节点老位置

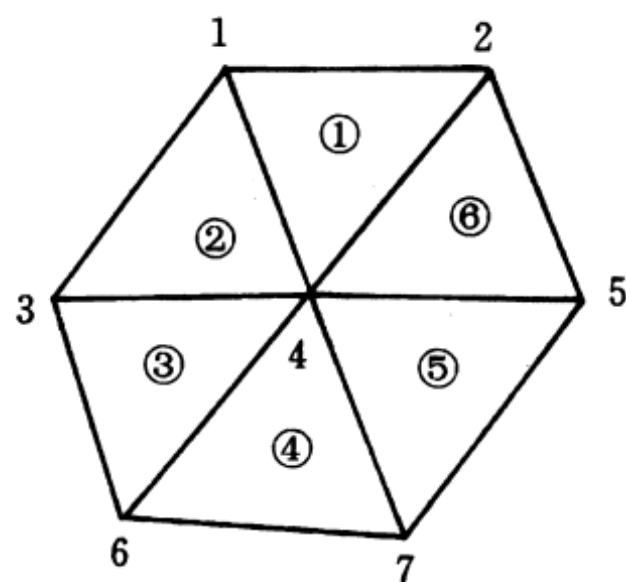
2. 去掉一些“过小的三角形”：



(a) 去掉过小单元③⑦



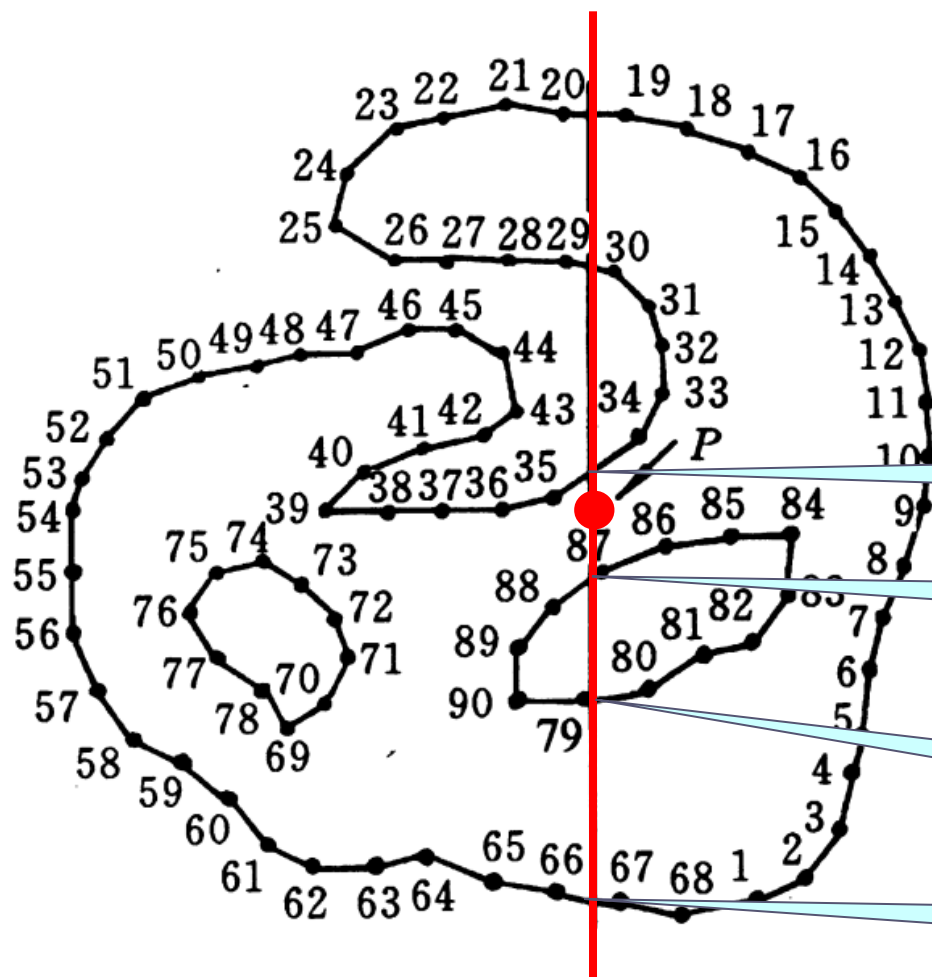
(b) 去掉过小单元③⑦后



(c) 重新编号后

2.7.6 几点说明

1. 要建立高效的判断节点是否在某个区域内的方法；



凡位于奇-偶次相交之间的必在区域内；而位于偶-奇次相交之间的在域外。

第4次相交

第3次相交

第2次相交

第1次相交

2. 要建立高效的节点连接信息的存取方法（数据结构）。

陈斌等. 非结构化网格快速生成技术, 西安交通大学学报, 2000, 34 (1) : 18—21

祁明旭等. 工程热物理学报, 2001, 22 (2) : 179—181

Yu B, Lin M J, Tao WQ. Automatic generation of unstructured grids with Delaunay triangulation and its applications. Heat Mass Transfer, 1999, 36: 361-370

2.8 生成非结构化网格的前沿推进法

2.8.1 前沿推进法的基本思想

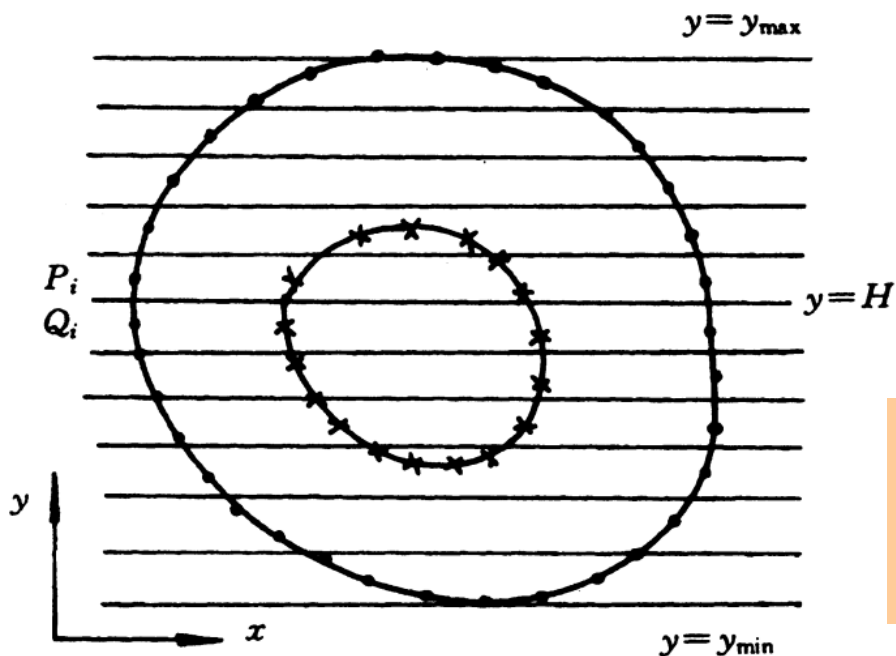
2.8.2 Lo的实施方法（1985）

2.8.3 前沿推进法的后续发展

2.8 生成非结构化网格的前沿推进法

2.8.1 前沿推进法的基本思想

1. 按一定方式生成计算区域内部的初始节点；



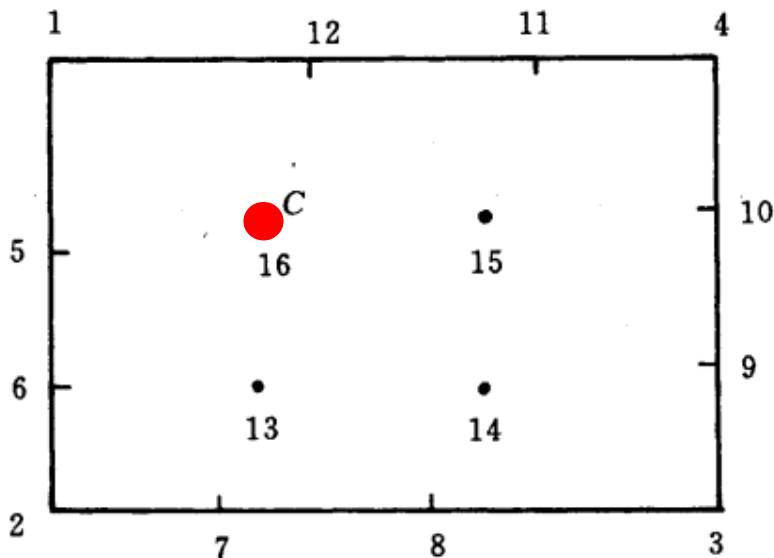
按选定的 Δy 做一组水平线；
在每条水平线上从左边界开始按选定的 Δx 设置节点；

2. 连接每两个相邻的边界节点，构成前沿线段集；

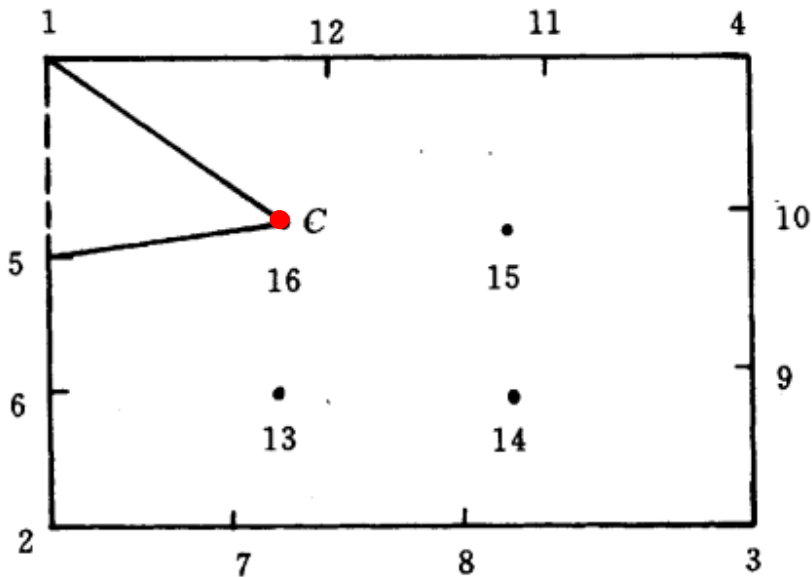
3. 将每一前沿线段按一定方式与一初始内点构成一个三角形；

4. 将所生成三角形的非前沿集的边加入前沿集，而将出发边从前沿集中删去；

5. 重复上述处理直到前沿集为空。



前沿集	1	5	6	2	7	8	3	9	10	4	11	12
Γ	5	6	2	7	8	3	9	10	4	11	12	1



前沿集	5	6	2	7	8	3	9	10	4	11	12	1	c
Γ	6	2	7	8	3	9	10	4	11	12	1	c	5

2.8.2 Lo的实施方案（1985）

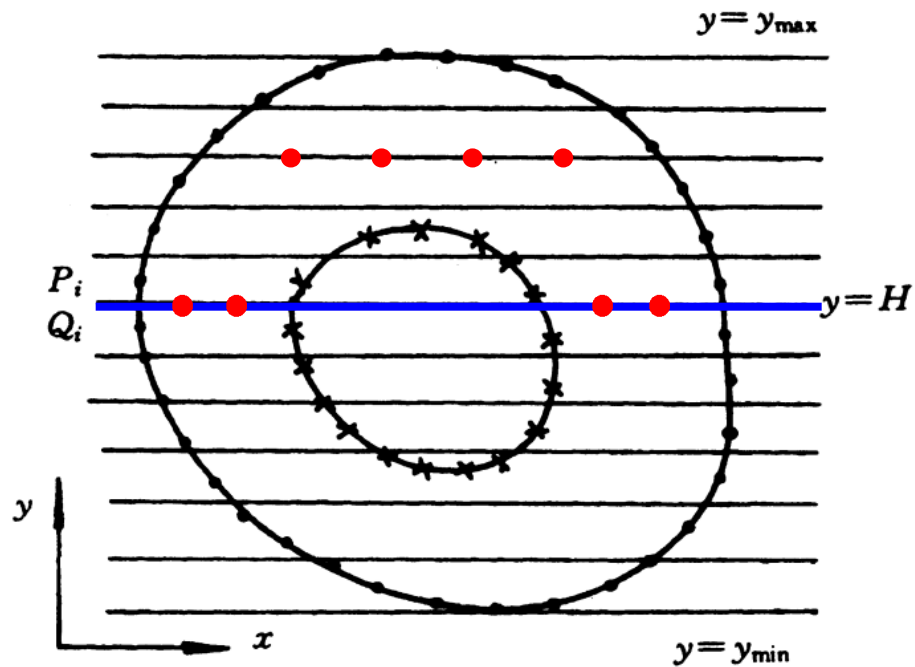
1. 前沿集生成—外边界按逆时针、内边界按顺时针方向将边界上相邻两点连接成线段，构成前沿集；

2. 初始内节点生成：

(1) 在 $y_{\max} - y_{\min}$ 之间按选定的 Δy 做均匀划分；

(2) 确定每条水平线与前沿集的交点，按 x 的大小排序；

(3) 对每条水平线上位于奇耦数交点之间的线段按平均 Δx 生成节点；



3. 内部三角形单元生成:

(1) 从位于外边界的一个前沿出发在其左侧寻找一个内点，使该前沿的两端点与该点距离之平方和为最小，连接该点生成三角形；

(2) 将出发边从前沿集中删去，将生成该三角形的两条边加入前沿集；

(3) 重复上述步骤，直至前沿集为空。

2.8.3 前沿推进法的后续发展

文献参见：

George P I, Serone E. The advancing front mesh generation method revisited. Int J Numer Methods Fluids, 1994, 37:3605-3619

Pirzadeh S. Three dimensional unstructured viscous grids by the advancing layers method. AIAA J.1996, 34(1):43-49

2.9 直角坐标系中的非结构化网格方法简介

2.9.1 直角坐标非结构化网格 (Cartesian unstructured grid)

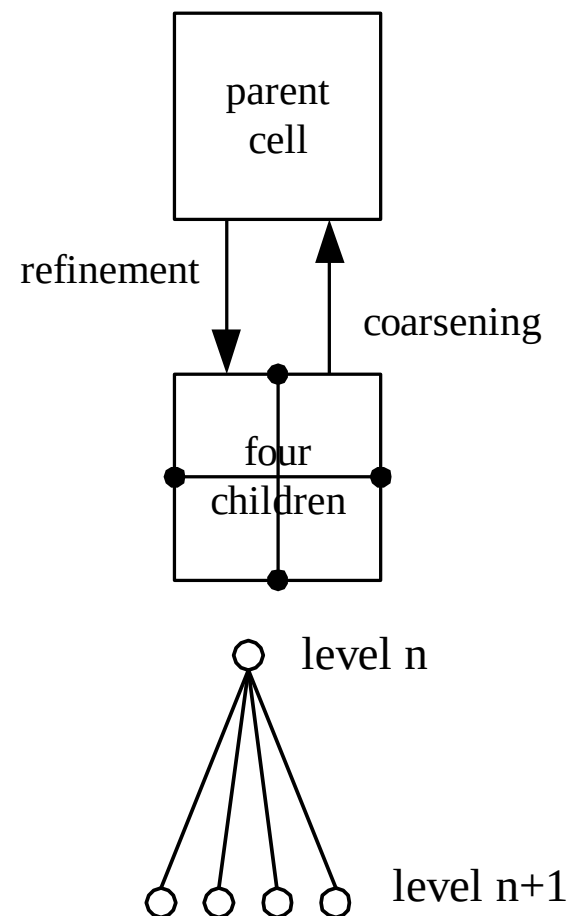
2.9.2 单元切割法 (Cut-cell method)

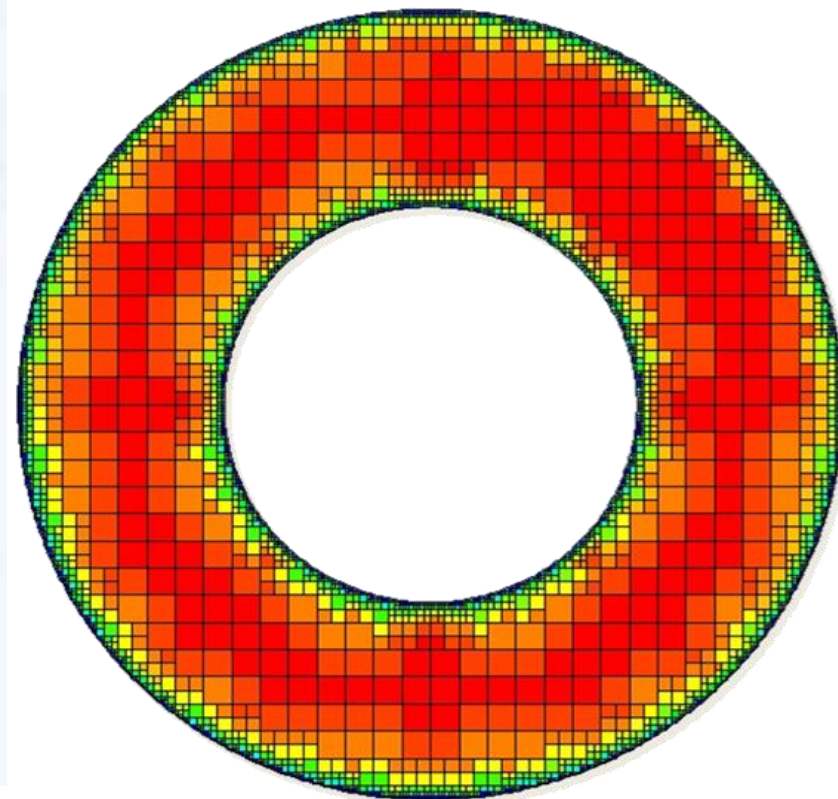
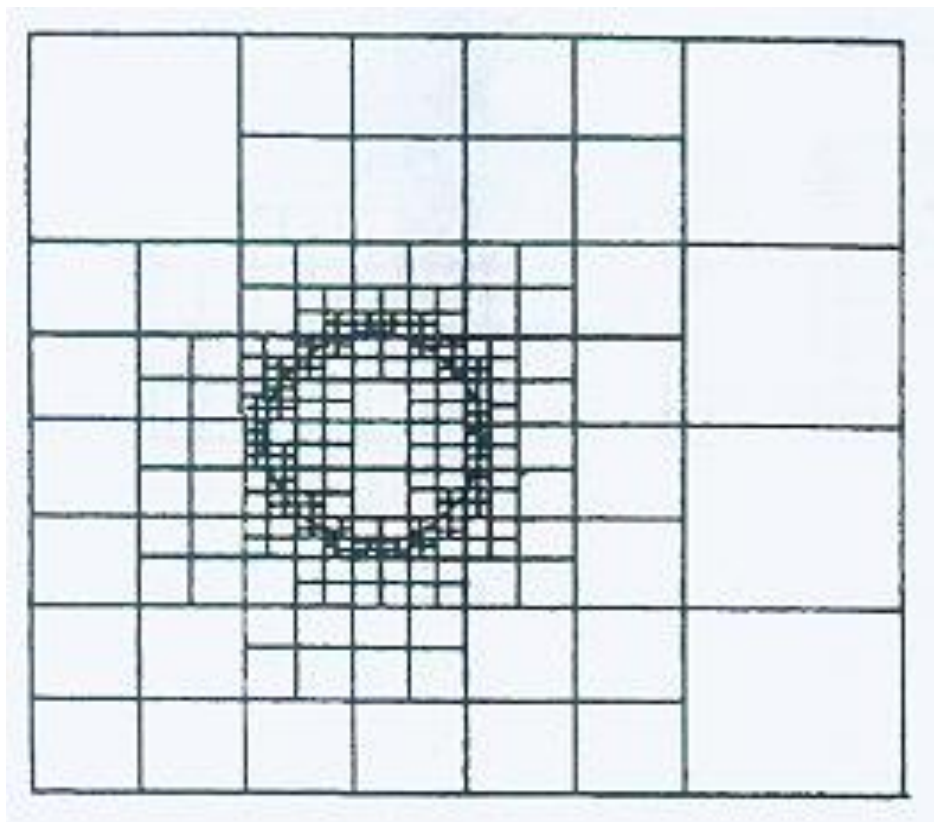
2.9.3 浸入边界法 (Immersed boundary method, IBM)

2.9 直角坐标系中的非结构化网格方法简介

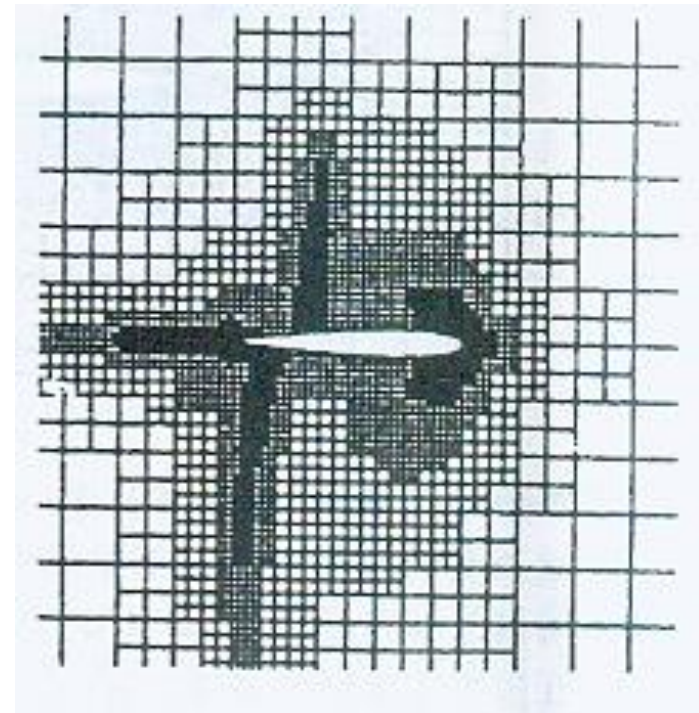
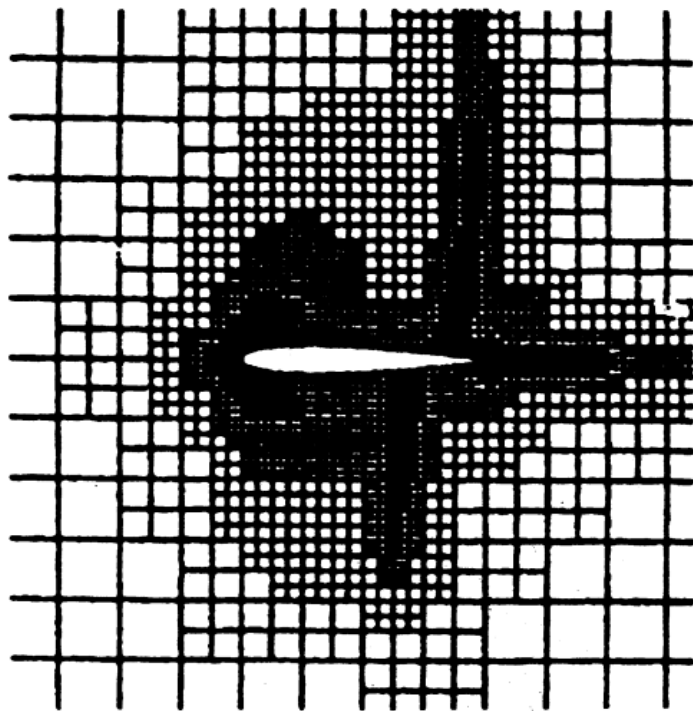
2.9.1 直角坐标非结构化网格 (Cartesian unstructured grid)

对于曲线边界采用不断细化方式使直角坐标的网格线能足够精确地逼近真实边界，**本质上是阶梯逼近**的思想。需要采用树状数据结构来存储不规则区域的网格信息。





Quirk J J. An alternative to unstructured grids for gas dynamics flows around arbitrarily complex two-dimensional bodies. Computers and Fluids, 1994, 23(1): 125-142.



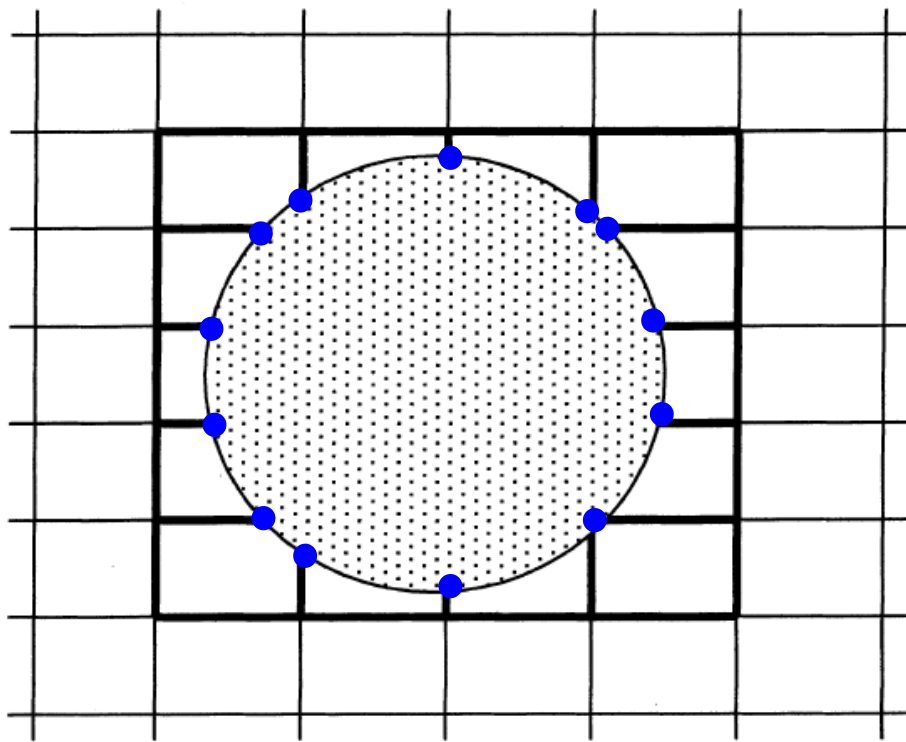
直角坐标非结构化网格的应用

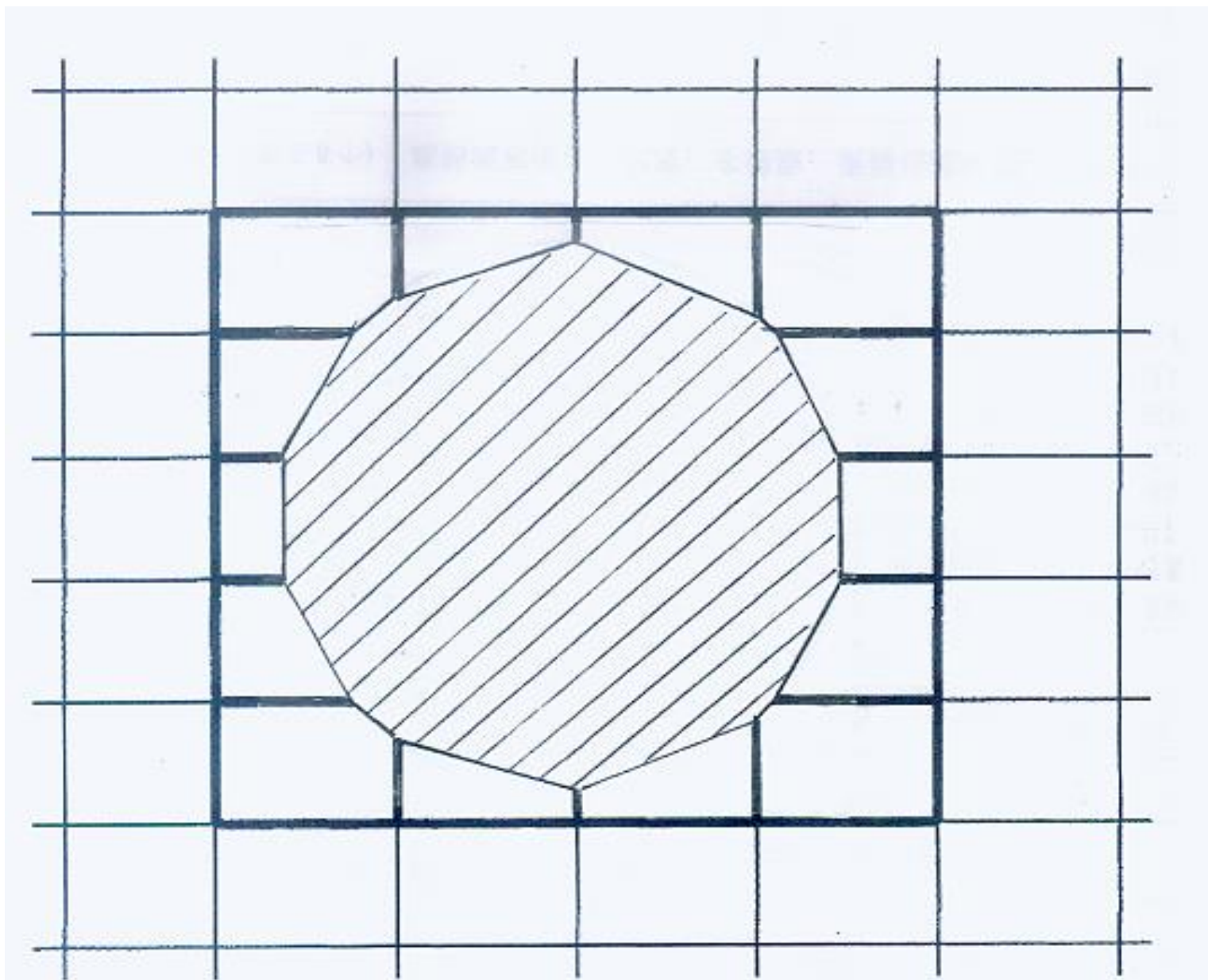
Yiu R F C, Greaves D M, Cruz S, et al. Quadtree grid generation: information handling, boundary fitting and CFD applications. Computers and Fluids, 1995, 25(8): 759-769.

Wang Z J. A quadtree-based adaptive Cartesian / quad grid flow solver for Navier-Stokes equations. Computers and Fluids, 1998, 27(4): 529-549.

2.9.2 单元切割法 (Cut-cell method)

1. 基本思想 以均匀分布的直角坐标网格为背景网格，将不规则区域投影到背景网格上，曲线边界与背景网格的网线相交的点作为折线的端点，从而用一系列首尾相连的折线来逼近折线。细化背景网格可以改进逼近的程度。

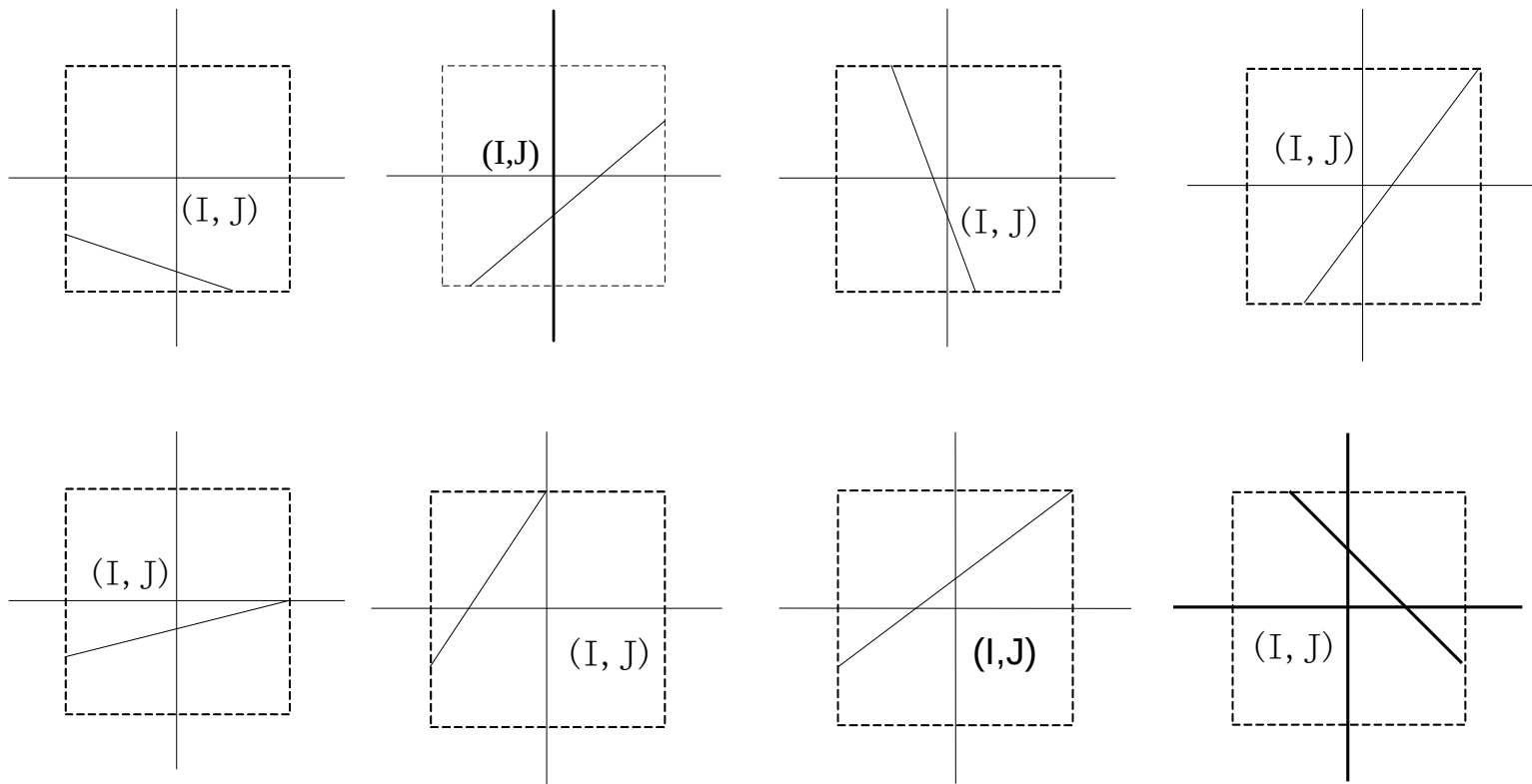




2. 四个关键技术

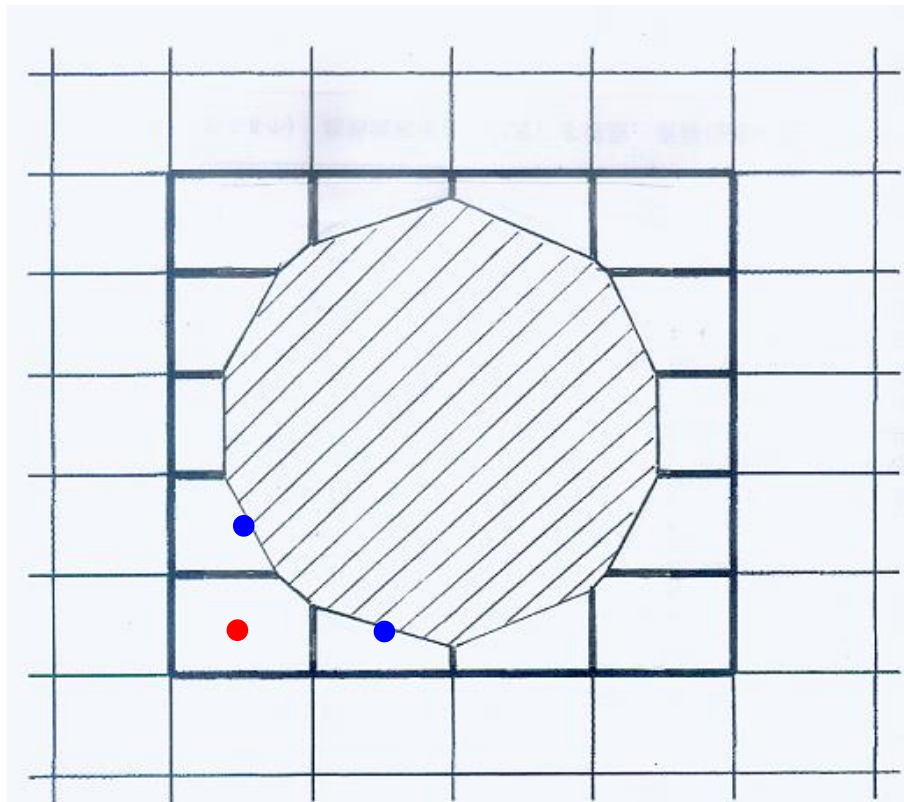
1) 之一——切割界面方位判断

界面被切割后有多种情况需要判断，归纳为：

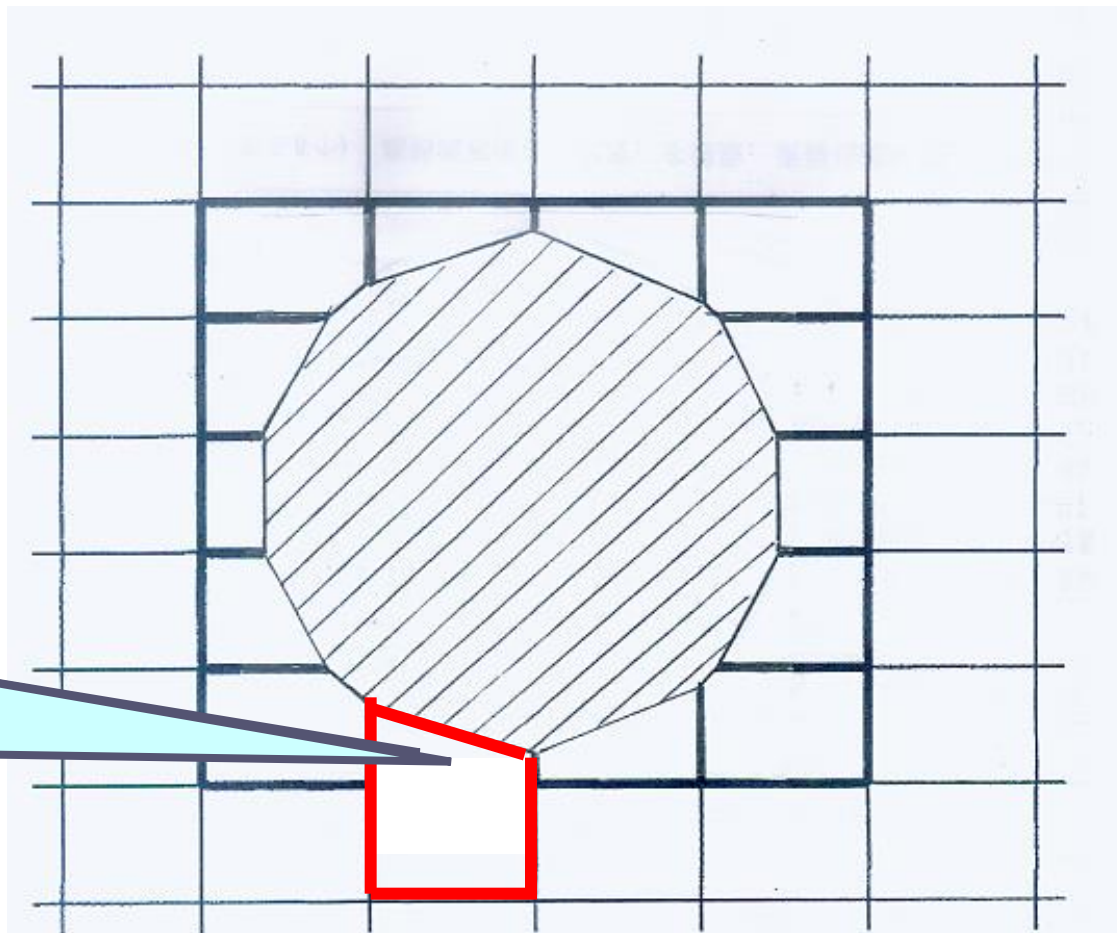


1) 之二——单元合并 (Cell merging)

(1) 不规则边界附近的
两类单元：正单元，单元
中心在流体区；负单元，
单元中心进入固体区。流
体区是需要计算的区域，
固体区不进入计算区域。
负单元（流体）面积如果
小于单元面积的一半，就
需要合并。

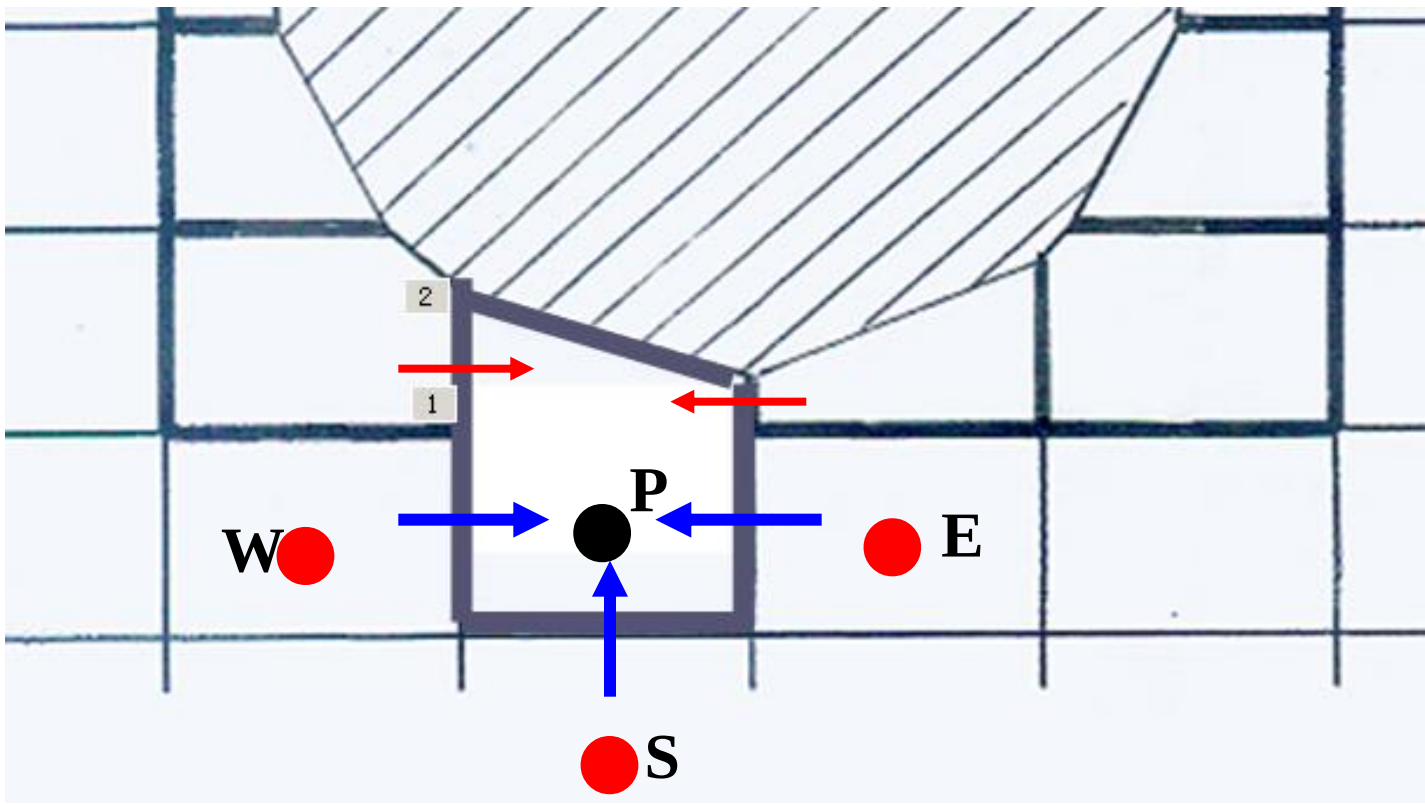


(2) 单元合并—将（流体）面积小于单元面积一半的负单元与相邻的正单元合并，构成新单元。

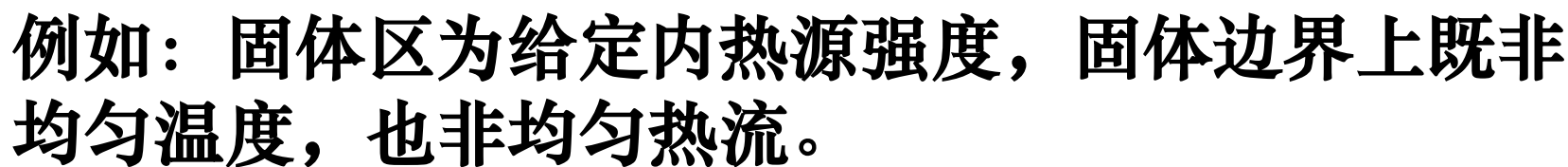


合并后的新单元

2) 之三——界面流量插值 (Interface flow interpolation)



切割界面上流量的计算需要插值。可采用线性插值与二次插值等。



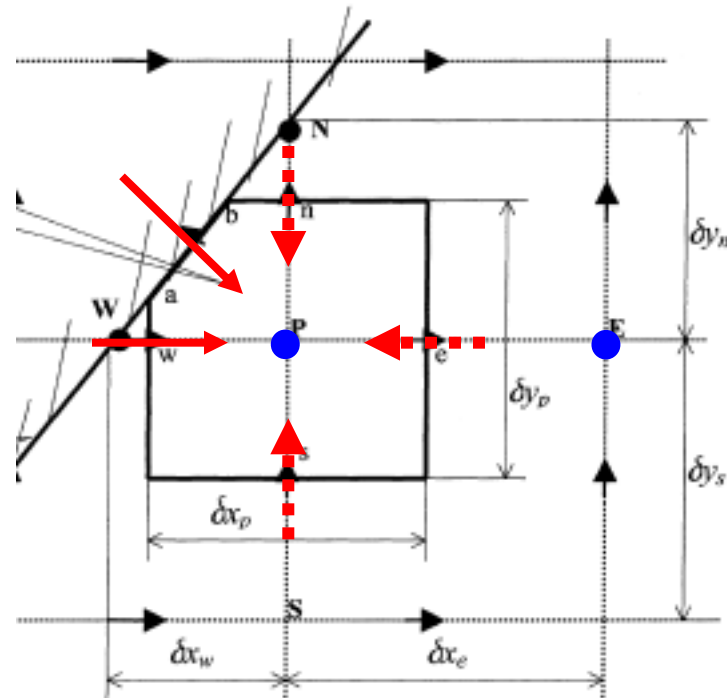
1) w- 界面法向导数（热流密度）的计算

假设: $\phi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$

系数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ 之值据 W, P, E 三点的 ϕ 值确定, 则对 x 求导即得: $(\partial \phi / \partial x)_w = \alpha_1 + 2\alpha_2 x$

2) a-b边法向导数的计算

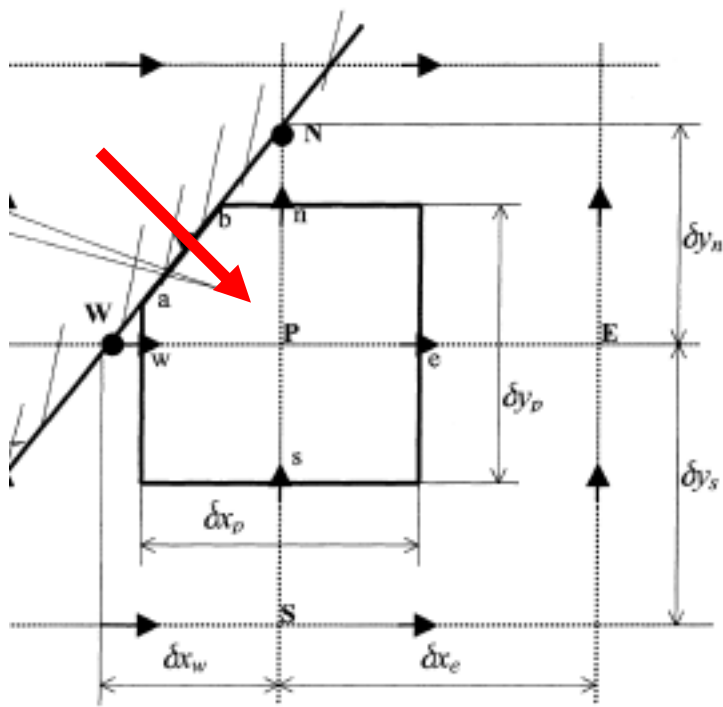
用插值从其临近点获得 a, b 两点的变量值, 然后采用以下插值函数:



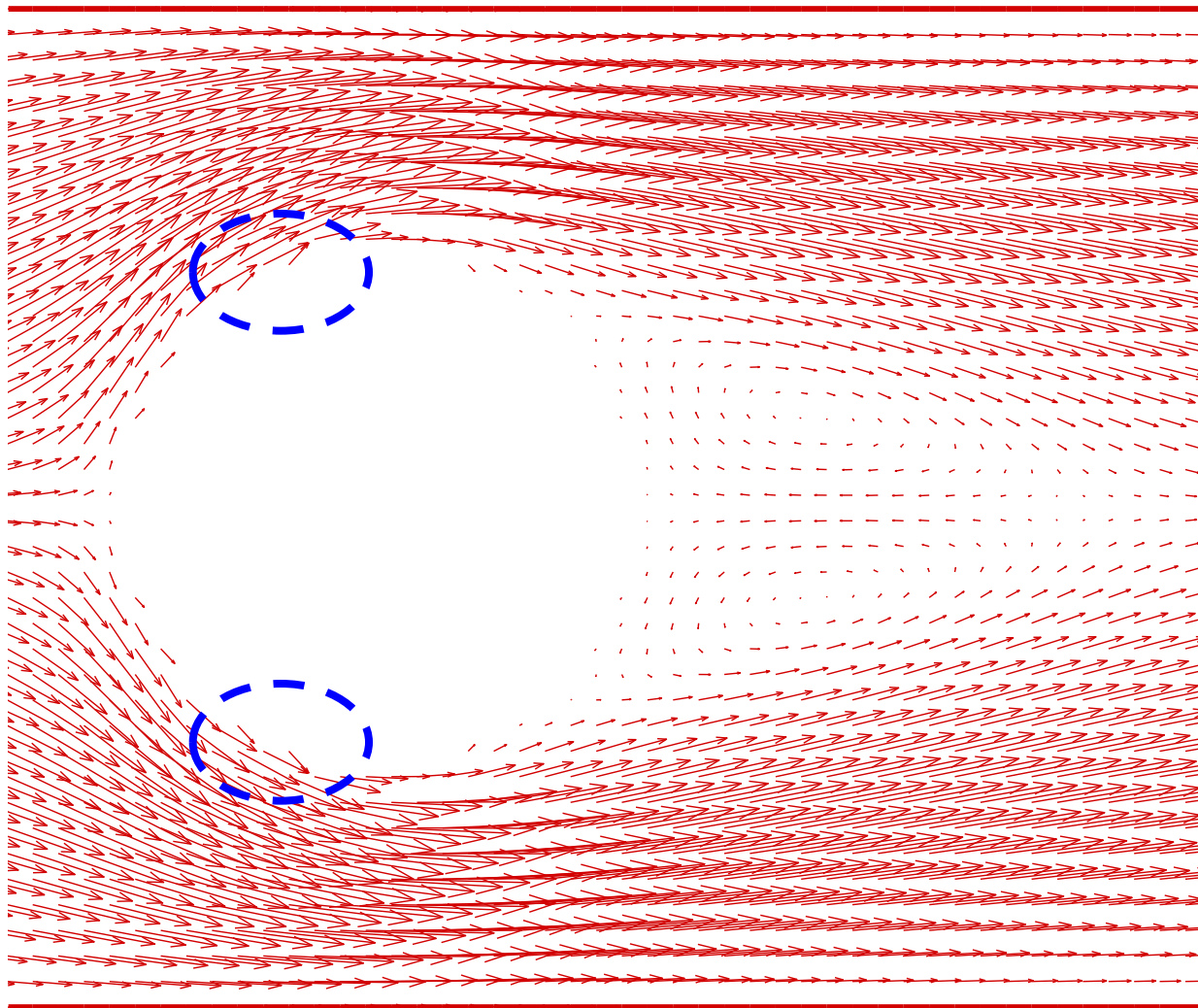
$$\phi(x, y) = c_0 + c_1 x + c_2 y$$

利用 **a, b** 及 **P** 点的变量值获得系数 c_0, c_1, c_2

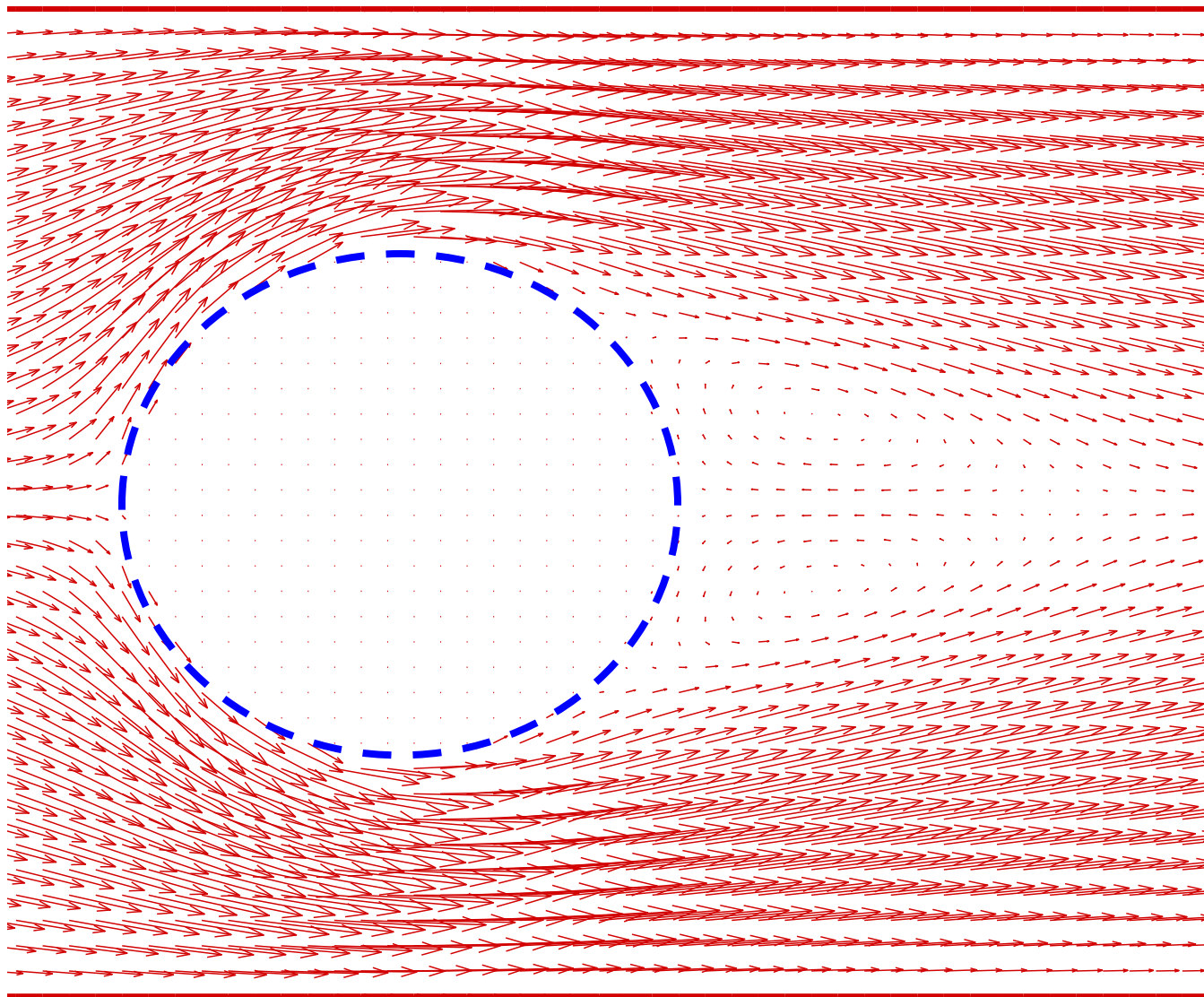
所需的方向导数可将上式分别对 x 以及 y 求导即得。



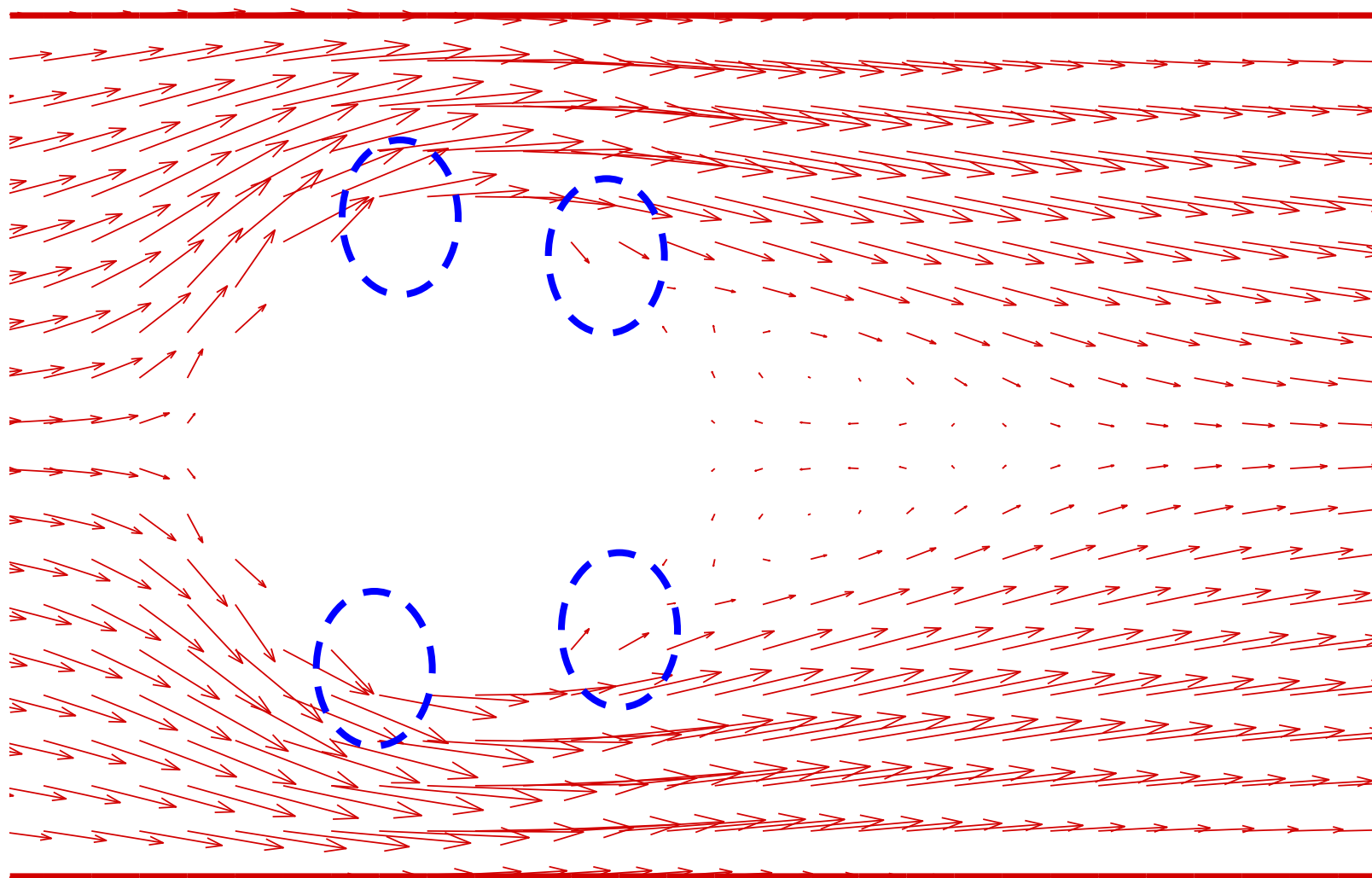
3. 举例一 与阶梯型网格的对比



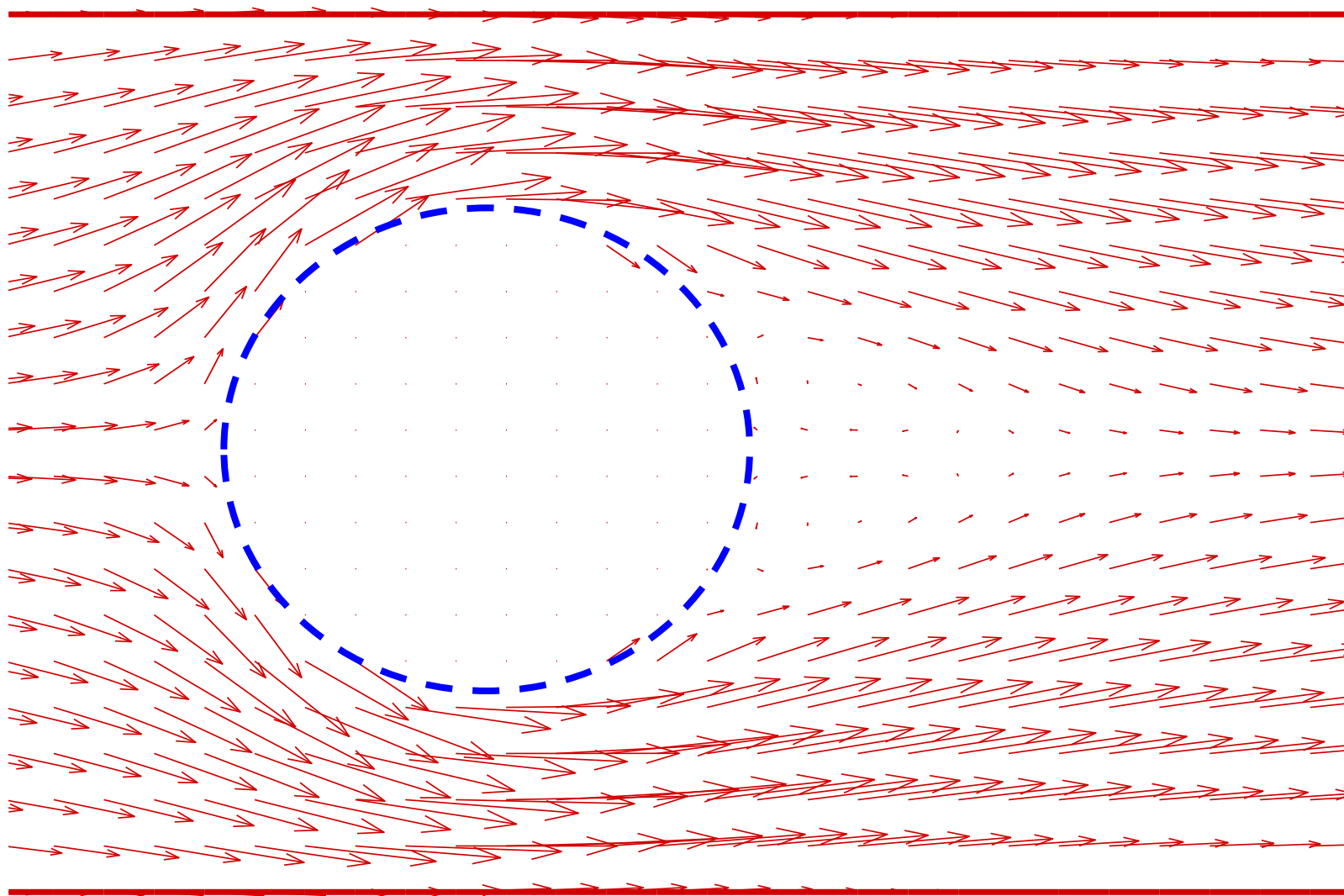
网格402X42 $Re=100$, 阶梯逼近法



网格402X42 Re=100, 单元切割法



网格202X22 Re=100, 阶梯逼近法



网格202X22 Re=100, 单元切割法

T. Ye, R. Mittal, H. S. Udaykumar, and W. Shyy. An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries, *Journal of Computational Physics*, 1999 156: 209–240

P.G. Tucker , Z. Pan. A Cartesian cut cell method for incompressible viscous flow, *Applied Mathematical Modeling*, 2000, **24**: 591- 606

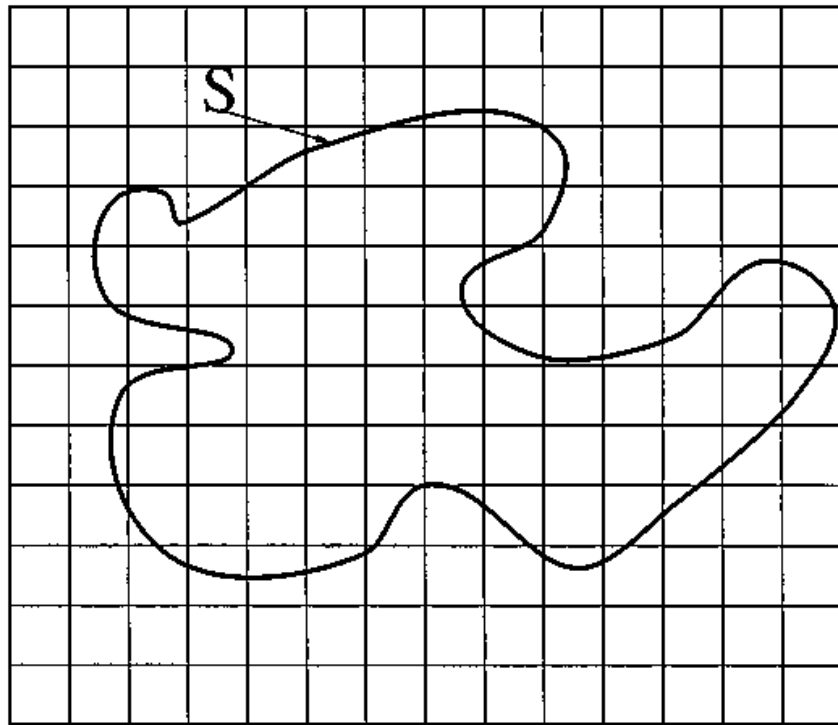
Meng-Hsuan Chung. Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape, *Computers & Fluids* 35 (2006) 607–623

Mihaela Popescu¹, Rick Vedder and Wei Shyy. A finite volume-based high-order, Cartesian cut-cell method for wave propagation, *Int. J. Numerical Methods in Fluids* 2008, **56**:1787–1818

菅振 等. 一种处理不规则边界的二维切削网格方法. *工程热物理学报*, 2010, 31 (5) : 835-838

2.9.3 浸入边界法 (Immersed boundary method, IBM)

1. 基本思想：在直角坐标系的网格上通过对控制方程在局部地区引入**附加的力或者附加源项**来模拟复杂的边界问题。



$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

附加的力

2. 关键问题:

- (1) 如何引入附加项?
- (2) 如何处理复杂边界附近的离散过程?

Fadlsun E A, Verzicco R, Orland P, et al. Combined immersed boundary finite difference methods for three dimensional complex flow simulations. J Comp. Physics, 2000, 161:35-60

Kin J, Kim D, and Choi H. An immersed boundary finite volume method for simulations of flow in complex geometries. J Comput. Physics, 2001, 171:132-150

Iaccarino G, Verzicco R. Immersed boundary technique for turbulent flow simulations. Appl Mech Rev, 2003, 56(3):331-347

小组网页: www.nht.xjtu.edu.cn

同舟共济 渡彼岸!

People in the same
boat help each
other to cross to the
other bank, where....

