热传导中的变分原理

程新广　李志信　过增元

（清华大学工程力学系，传热强化与过程节能教育部重点实验室，北京　100084）

摘　要　采用力学中建立最小势能原理和最小余能原理的加权余量法，分别得到了热传导中势能型与余能型的变分原理。通过对势能型变分原理的分析发现，对于可逆的导热过程，“力”(热流) 在“位移”(温度) 上做的“功”完全转换为物体的“势能”，即热量传递势容。而在不可逆的稳态导热过程中，这个势能完全被耗散掉了，成为传递势容耗散。对于非稳态导热过程，则类似于粘弹性物体，热流在温度位移上做的“功”一部分转换为物体的传递势容，而另外一部分成为传递势容的耗散。

关键词　变分原理；热量传递势容；热量传递势容耗散

中图分类号：TK124　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0253-231X(2004)03-0457-03

VARIATIONAL PRINCIPLES IN HEAT CONDUCTION

CHENG Xin-Guang　LI Zhi-Xin　GUO Zeng-Yuan

(*Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing*　100084, *China*)

Abstract　Analogue to variational principles in solid mechanics, variational principles in heat conduction are developed by the method of weighted residuals in this paper. In steady heat conduction, the principle show that the “potential energy”, which is transformed from the “work” done by the “force” of heat flux in the “displacement” of temperature, is entirely dissipated. The potential energy is defined as the heat transport potential capacity. However, in unsteady heat conduction, some “potential energy” is stored in the material, and the else is dissipated.

Key words　variational principles; heat transport potential capacity; dissipation

1 前　言

随着现代科学技术的快速发展，无论在工业生产中还是在高科技领域，都不可避免地涉及热量传输及其强化问题。到目前为止强化传热的理论分析尽管有了很大的提高，但是还很不成熟，强化技术很大程度上还是依赖于实验 [1]。而对强化传热的理论分析依赖于传热机理的认识。一般而言，物理问题可以用偏微分方程，也可以用变分原理来描述。而变分原理相对偏微分方程有一个突出的优点 [2]，由于变分原理是整体描述，其变分积分可以是一个有意义的物理量，对物理现象的描述更为简洁和统一。因此有必要对传热中的变分原理及其物理意义进行研究。

目前已经有很多学者对传热的变分原理进行了研究，Onsager[3] 在 1931 年基于熵产的概念提出了一个稳态传热的变分原理，在此基础上 Rosen[4] 以及 Gyarmati[5] 提出了传热的受限制变分原理，将其推广至非稳态问题。Glansdorff 与 Prigogine[6] 进一步考虑了物性参数随温度变化的情况，提出了局域势能法。从 1955 年开始 Biot[7] 在一系列的文章中，类比力学中的 Hamilton 原理，给出了变分形式的热传导方程，并导出了以广义坐标表示的热传导的拉格朗日表达式，同时提出了热势和热耗散函数等概念。这些变分原理都是从不可逆过程热力学的观点出发得到的。

加权余量法已经有效的应用于弹性固体力学中，并建立了最小势能原理和最小余能原理 [8]。本文应用该方法建立了导热过程中的变分原理，并对其物理含义进行了分析。

2 传热中的变分原理

设一个物理区域受在外界热流作用下达到热平

收稿日期：2003-12-16；**修订日期**：2004-03-11
基金项目：国家重大基础研究发展规划资助项目 (No.G20000263)
作者简介：程新广 (1977-)，男，浙江永康人，清华大学博士生，主要从事传热强化与控制的研究。

衡 (如图 1) 。设该区域体积为 V ，表面 S 一部分 S_q 上为定热流条件。而在另外一部分 S_T 上为定温条件。

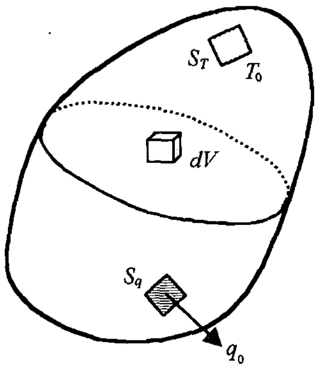

图 1 传热区域

则这个导热问题满足以下条件:

(a) 傅里叶定律

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T \tag{1}$$

或者

$$\nabla T = -\lambda \boldsymbol{q} \tag{2}$$

其中 $\lambda = 1/k$ 。

(b) 导热微分方程

$$\nabla \boldsymbol{q} - \dot{Q} = 0 \tag{3}$$

(c) 定温边界条件

$$S_T : T = T_0 \tag{4}$$

(d) 定热流边界条件

$$S_q : \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = -q_0 \tag{5}$$

式中的负号是由于传热中以流入热流为正，流出为负；这与面法向量相反。

经比较可以发现，以上控制方程在形式上与小位移弹性理论的控制方程是类似的，而其中温度类似于位移，热流类似于作用力。

2.1 势能型变分原理

类似于弹性理论中的最小势能原理，针对热传导过程存在相应的变分原理。根据方程 (3) 和 (5)，利用加权余量法有

$$\iiint\limits_V (\nabla \boldsymbol{q} - \dot{Q})\delta T dV - \iint\limits_{S_q} (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} + q_0)\delta T dS = 0 \tag{6}$$

根据傅里叶定律 (1)，并当导热系数为常数时，式 (6) 可以写为

$$\delta \Pi_T = 0 \tag{7}$$

其中

$$\Pi_T = \iiint\limits_V [\frac{1}{2}k(\nabla T)^2 - \dot{Q})T]dV - \iint\limits_{S_q} q_0 T dS = 0 \tag{8}$$

可以证明 $\delta^2\Pi_T > 0$ ，则式 (7) 为极小值原理：在一切具有足够光滑性，并满足定温边界条件 (4) 的温度中，实际的温度 T 必使泛函 Π_T 最小。

得到了传热过程的变分原理的泛函 Π_T 表达式后，有必要对它的物理意义进行讨论。在弹性力学中讨论弹性体变形时，当积分值 $\int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ 与路径无关，则存在一个状态函数全微分 $dA = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$(其中 σ_{ij} 为应力，ε_{ij} 为应变)。从物理意义上而言，当弹性体在可逆过程的等温或绝热条件下变形，也就是说，外力做的功完全转换为物体的内能或者 Helmholtz 自由能，则的确存在这么一个状态函数，称之为应变能函数或者应变能密度。

传热过程类似于弹性体受力变形，也存在一个与应变能函数类似的物理量 A_T ，当导热系数为常数时，

$$A_T = \frac{1}{2}k(\nabla T)^2 \tag{9}$$

即式 (8) 右边第一项。但是传热过程与弹性体变形的不同之处在于传热是一个不可逆过程，因此这个 A_T 有别于应变能密度，它不是状态函数，而是一种“势能 ” 的耗散。

为了深入了解这个耗散的意义，我们考虑一个可逆的传热过程。该传热过程中时时刻刻处于平衡状态，并在过程期间没有任何耗散效应，当然物体内部也不存在温度梯度，那么热流在其 “位移 ”(温度) 上做的 “功 ” 完全转换为物体的 “势能 ” 。而该传热过程的平衡方程为

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \dot{Q} = 0 \tag{10}$$

方程 (10) 是一阶偏微分方程，是非自伴算子。根据 Vainberg 定理，微分算子具有自伴性是变分学反命题存在并能构造出来的前提 [2] 。针对非自伴的过程，Gransdroff 和 Prigogine 提出的局域势能法可以将变分技术可以推广到非自伴的问题中 [6] 。因此，应用局域势能法得到方程 (10) 的变分描述为

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T^2) dV dt =$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \iiint\limits_V \dot{Q} T dV dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \iint\limits_{S_q} q_0 T dS dt \tag{11}$$

也就是说在可逆的传热过程中，热流是一种“保守力”。它做的“功”转换为物体的“势能”，其表达式为

$$\Psi = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\rho c_p T^2 dV \tag{12}$$

这个“势能”被定义为热量传递势容，其物理意义为物体传递热量的总能力 [9]。而对于一个稳态的不可逆传热过程，热流做的“功”没有转换为物体的传递势容，而是完全被耗散掉了，其耗散量即为式 (10) 中的 A_T，它被定义为热量传递势容耗散。因此式 (7) 的极小值原理即为文献 [9] 中提出的最小热量传递势容耗散原理。

根据式 (7) 和 (11)，非稳态导热过程的势能型变分原理为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T^2) + \frac{1}{2}k(\nabla T)^2 - \dot{Q}T\right]dV dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\iint\limits_{S_q} q_0 T dS dt \tag{13}$$

它表明外界热流做“功”一部分转换为物体的传递势容，一部分由于传热的不可逆性转换为传递势容耗散。这类似于在粘弹性材料中，外力做的功一部分转换为物体的变形能，一部分由于粘性而耗散为热能。

2.2 余能型变分原理

与弹性理论中的最小余能原理想对应，热传导中也存在类似的变分原理。根据方程 (2) 和 (4)，利用加权余量法有

$$\iiint\limits_V (\nabla T + \lambda \boldsymbol{q})\cdot\delta\boldsymbol{q} dV + \iint\limits_{S_T}(T_0 - T)\delta\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} dS = 0 \tag{14}$$

当导热系数为常数时， $\lambda = 1/k$ 也为常数。则把式 (3) 代入式 (14) 后，可以得到

$$\delta\Pi_q = 0 \tag{15}$$

其中

$$\Pi_q = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\lambda q^2 dV + \iint\limits_{S_T} T_0(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})dS \tag{16}$$

可以证明 $\delta^2\Pi_q > 0$，式子 (15) 也为极小值原理：在一切具有足够光滑性，并满足定热流边界条件 (5) 的允许的热流中，实际的热流必使泛函 Π_q 最小。

3 结　论

(1) 与弹性力学中最小势能原理和最小余能原理类似，在传热学中也存在势能型与余能型的传热变分原理。

(2) 可逆的传热过程中，“力”(热流) 在其“位移”(温度) 上做的“功”完全转换为物体的“势能”，即热量传递势容。而在不可逆的稳态传热过程中，这个势能完全被耗散掉了，即热量传递势容的耗散。

(3) 在非稳态传热过程，则类似于粘弹性物体，热流做的“功”一部分转换为物体的传递势容，而另外一部分成为传递势容的耗散。

参　考　文　献

[1] Bergles A E. Heat Transfer Augment—Encouraging or Accommodating Heat Flux. Journal of Heat Transfer-T of ASME, 1997, 119(1): 8–19

[2] Finlayson B A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principle. New York: Academic press, 1972

[3] Onsager L. Reciprocal Relations in Irreversible Process I. Physical Review, 1931, 37(4): 405–426

[4] Rosen P. On Variational Principles for Irreversible Processes. Journal of Chemistry Physics, 1953, 21(6): 1220–1221

[5] Gyarmati I. Non-Equilibrium Thermodynamics. Berlin: Springer Verlag, 1970

[6] Glansdorff P, Prigogine I. Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations. Willey-Interscience, 1971

[7] Biot M A. Variational Principles in Heat Transfer. London: Oxford University Press, 1970

[8] 钱伟长. 广义变分原理. 上海：知识出版社， 1985

[9] 过增元，程新广，夏再忠. 最小热量传递势容耗散原理及其在导热优化中的应用. 科学通报， 2003, 48(1): 21–25