

# 计算传热学的近代进展

## 第六章 捕捉界面的VOSET方法



**主讲 陶文铨**

西安交通大学能源与动力工程学院  
热流科学与工程教育部重点实验室  
2016年6月15日, 西安

# 第六章目录

6.1 引言

6.2 VOF方法简介

6.3 Level Set方法简介

6.4 VOSET方法的基本思想

6.5 VOSET方法中距离函数的计算

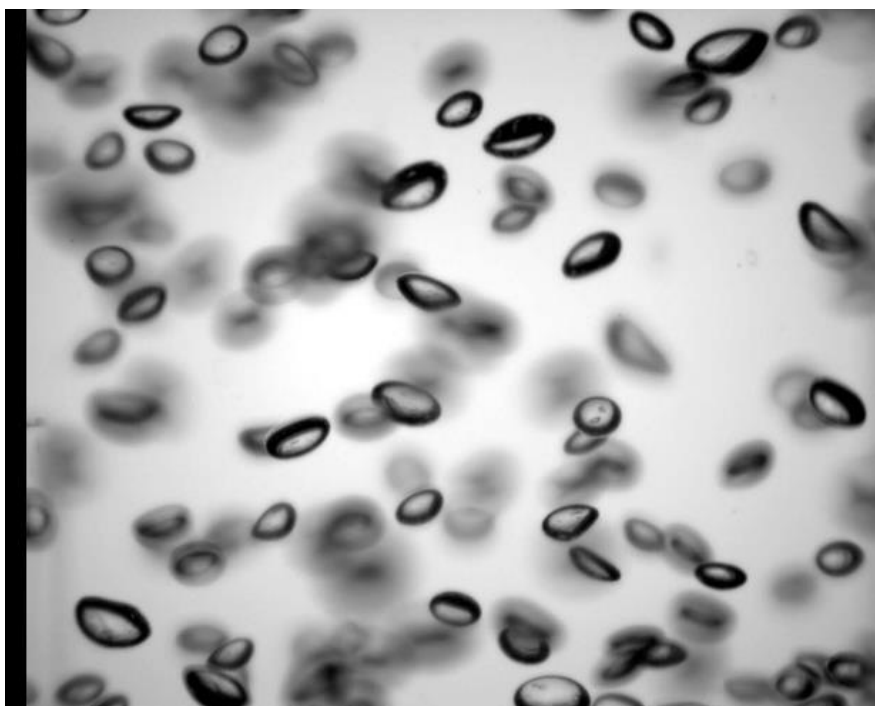
6.6 采用VOSET方法求解气液两相流问题

6.7 数值计算实例

6.8 向三维推广的关键问题

## 6.1 引言

两相流是一类非常普遍的自然现象。例如：液滴/气泡流动，凝结，沸腾，晶体生长。两相流中的运动界面的存在对直接数值模拟提出了新的要求。



## 气液两相流数值模拟方法的分类

气液两相流的模拟由于存在两相而使数值方法的复杂性大大增加，至今连如何分类也还没有统一的意见；在连续介质的范围内就气液两相流的数值模拟而言，可以大别为以下两大类：

- 1. 精细捕捉相界面的方法：**随着流体的运动相界面的位置移动能够精细地予以描述，如VOF；
- 2. 非精细捕捉相界面的方法：**求解流场及容积含气率等相分布的变化，如均相模型，双流体模型等；即使分辨不同的相，也只是假定分散相是均匀的颗粒，并不精细刻画其界面的变化，如颗粒轨道模型，等。

## 目前常用的几种的相界面捕捉方法:

(1) Volume of fluid (VOF), 流体体积方法

(2) Level Set (LS), 水平集方法

(3) Front tracking, 前沿跟踪方法

(4) Phase-field, 相场法

(5) VOSET, 流体体积和水平集耦合方法

## 6.2 VOF方法简介

### 6.2.1 流体体积函数

### 6.2.2 流体体积函数的推进方程

### 6.2.3 几何重构与推进方法

### 6.2.4 PLIC方法

## 6.2 VOF方法简介

1981年由 Hirt 和 Nichols 提出。

### 6.2.1 流体体积函数

#### 1. 定义

VOF方法用**流体体积函数 (color function)  $C$**  来标识两相的分布。一个计算网格的流体体积函数指**主相(reference phase)**流体在整个网格中所占的体积比例。

根据流体体积函数的定义：

$$C = 0$$

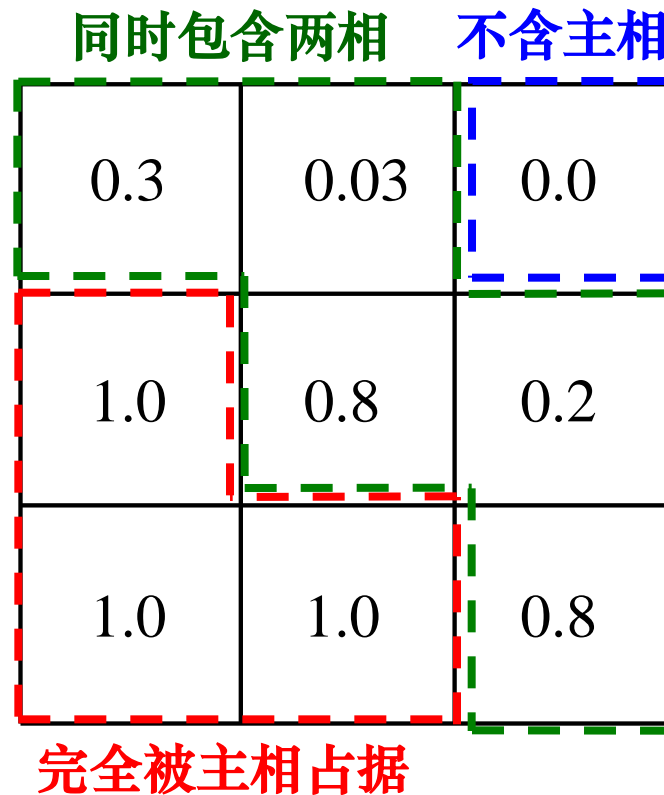
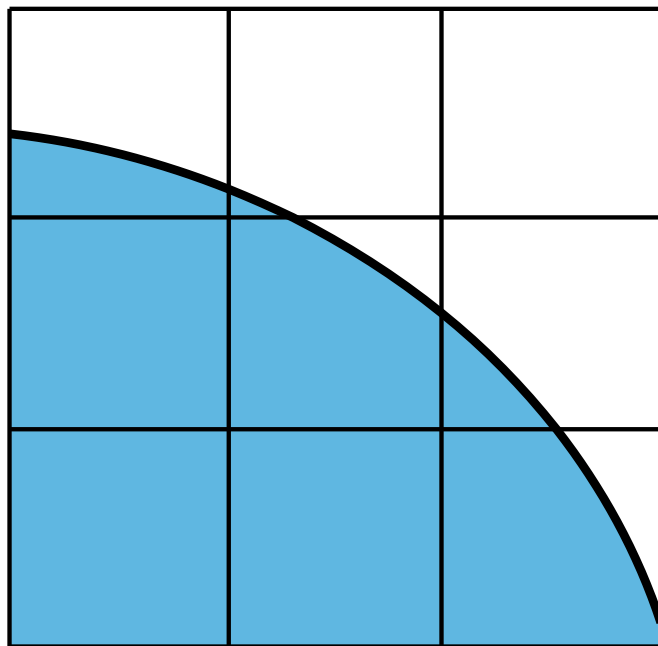
表示网格不含主相；

$$C = 1$$

表示网格完全被主相占据；

$$0 < C < 1$$

表示网格同时包含两相。



## 2. C 函数的特点:

- (1) 有界性; ( $0 \leq C \leq 1$ ) ;
- (2) 在相界面上阶跃性变化。

### 3. 用流体体积函数计算界面方向和曲率

由于流体体积函数的阶跃性，使得计算界面曲率和方向都不准确；因此一般不直接用其计算界面的法方向和曲率，而是采用**光顺化的流体体积函数**  $\tilde{C}$

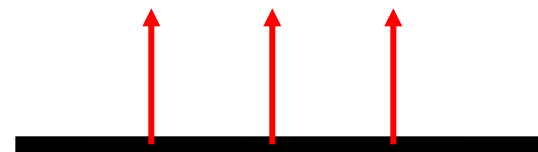
界面方向

$$\vec{n} = \nabla \tilde{C}$$

界面曲率

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \tilde{C}}{|\nabla \tilde{C}|}$$

曲线的曲率是单位法线的散度：



对平面，法线方向不变，

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = 0 \quad \text{曲率为零} \quad \kappa = 0$$

光顺化的流体体积函数可以通过对流体体积函数进行**局部平均和光滑**求得。例如：

$$\tilde{C}_{i,j} = \sum_{m,n} C_{m,n} K \left( \left| \vec{r}_{i,j} - \vec{r}_{m,n} \right|, \varepsilon \right)$$

这里的  $K$  为光顺化函数，例如可以使用B样条函数：

$$K(r, \varepsilon) = \begin{cases} (40/7\pi) \left( 1 - 6(r/\varepsilon)^2 + 6(r/\varepsilon)^3 \right) & (r/\varepsilon < 1/2) \\ (80/7\pi) (1 - r/\varepsilon) & (1/2 \leq r/\varepsilon < 1) \\ 0 & (r/\varepsilon > 1) \end{cases}$$

$\varepsilon$  控制光顺化的厚度，一般选择三个网格宽度： $\varepsilon = 3\Delta$

## 6.2.2 流体体积函数的演化（推进）方程

### 1. 方程的导出

界面扑捉是非稳态过程，求解的基本思想是首先确定流场，其时通过物性参数来反映两相流，但不细化的界面；确定流场后在一个给定的流场下，再推进主相的分布。

假设：

- (1) 两相互不相溶； 无扩散项
- (2) 没有相变、化学反应等过程消耗/生成主相； 无源项

流体体积函数的控制方程只剩下瞬态项和对流项：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C = 0$$

一个网格的流体体积函数只因主相的流入/流出而变化。

将VOF方程的对流项变成守恒型：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C + \underline{C \cdot \nabla \vec{u}} = 0$$

即：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} C) = 0$$

对控制容积 $\Delta V$ ，时间步长 $\Delta t$ 积分：

$$(C^{t+\Delta t} - C^t) \Delta V + \int_t^{t+\Delta t} \oint_{\Delta A} \vec{u} C \, d\vec{A} \, dt = 0$$

主相体积变化

净流出体积

可以看出，VOF方法定义的主相通过网格交界面在不同的网格中转移，这决定了VOF方法能保持**总体的质量守恒**。

## 2. 方程的求解

VOF方程显然可以采用**有界高阶组合格式按照纯对流问题来求解**。

但是，任何格式都无法避免假扩散，这使得流体体积函数在推进的过程中阶跃性被逐渐抹平，**相界面逐渐变厚**。

为了解决这个问题，需要对格式进行修正以控制界面的厚度。例如，有人用修正的MUSCL格式求解VOF方程。

S. Y. Lin, Y.H. Chin, C.M. Wu, J.F. Lin, Y.C. Chen, A pressure correction-volume of fluid method for simulation of two-phase flows, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 68, 181-195, 2012.

另一种更普遍的方法是采用**几何重构与推进方法求解VOF方程**，这样可以使流体体积函数的阶跃性能够自动保持。

## 6.2.3 几何重构与推进方法

就是研究对于给定时刻的  $C$  分布如何随着流动而变化到下一时刻的分布。

用几何方法求解 VOF 方程包含两个步骤。

### 1. 求解步骤

#### (1) 界面重构 (Reconstruction);

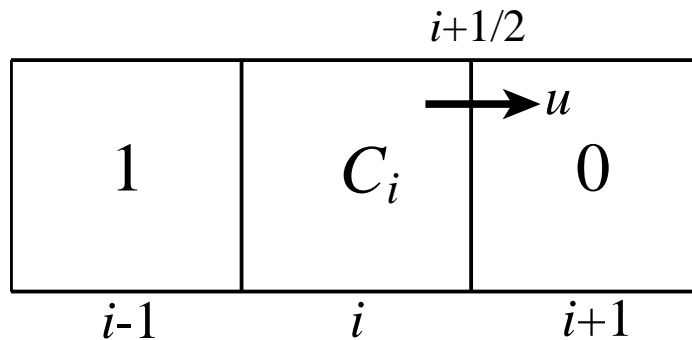
满足  $0 < C < 1$  的网格同时包含两相，自然也就包含相界面。VOF 相界面的重构，就是在一定的假定下，估计这一类网格内部相界面的位置。

#### (2) 界面推进 (Advection);

根据重构得到的相界面位置，计算  $\Delta t$  内主相流体在网格之间的交换，得到下一个时层的流体体积函数。

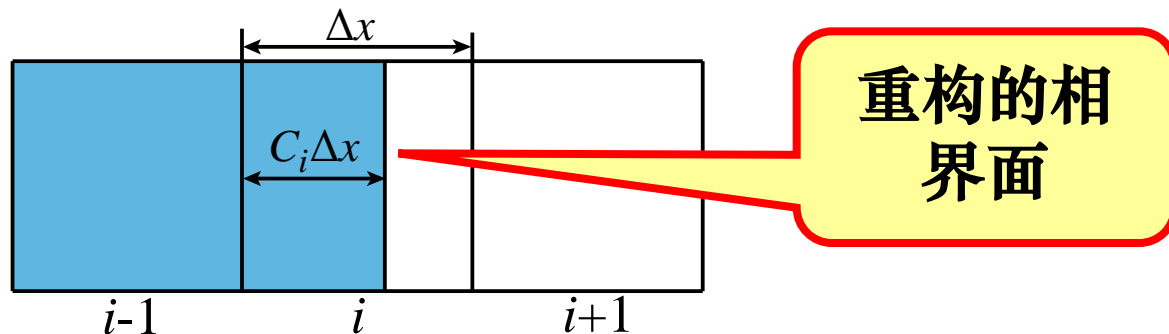
## 2. 举例

以一个一维度问题说明这两个步骤。

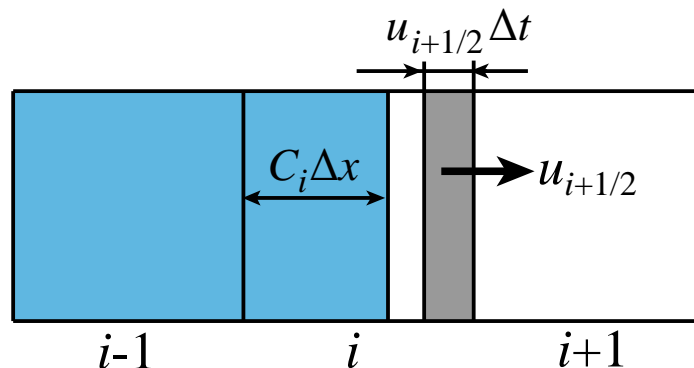


### (1) 界面重构

只有网格  $i$  需要重构界面；在网格  $i$  上，主相流体位于左侧，界面与左边界的距离由流体体积函数计算。



## (2) 界面推进



从网格  $i-1$  流入网格  $i$  的主相流体体积:

$$F_{i-1/2} = u_{i-1/2} \Delta t$$

从网格  $i$  流入网格  $i+1$  的主相流体体积:

$$F_{i+1/2} = \begin{cases} 0 & u_{i+1/2} \Delta t < (1-C) \Delta x \\ u_{i+1/2} \Delta t - (1-C) \Delta x & u_{i+1/2} \Delta t > (1-C) \Delta x \end{cases}$$

计算下一时层网格  $i$  的流体体积函数:

$$C_i^{t+\Delta t} = C_i^t + (F_{i-1/2} - F_{i+1/2}) / \Delta x$$

### 3. 对时间步长的要求

注意： $(F_{i-1/2} - F_{i+1/2}) / \Delta x = (u_{i-1/2}\Delta t - u_{i+1/2}\Delta t) / \Delta x$

与 $C$  具有相同的量纲，因此其最大值必小于等于1，也就是：

$$\frac{u_{\max} \Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

即要求一个时间步长推进的距离不能超过一个网格的长度，也就需要限制时间步长。

这就是限制时间步长的 **CFL(Courant, Friedrichs, and Lewy)**条件；设定时间步长的方法为：

$$\Delta t = C_{FL} \frac{\Delta x}{u_{\max}}$$

这里的  $C_{FL}$  就是 **CFL 数**，有时也称为 **Courant 数**。

实际计算中通常选择  $C_{FL} = 0.1$  或者更小。

## 4. 二维相界面的重构

(1) 计算界面法方向；

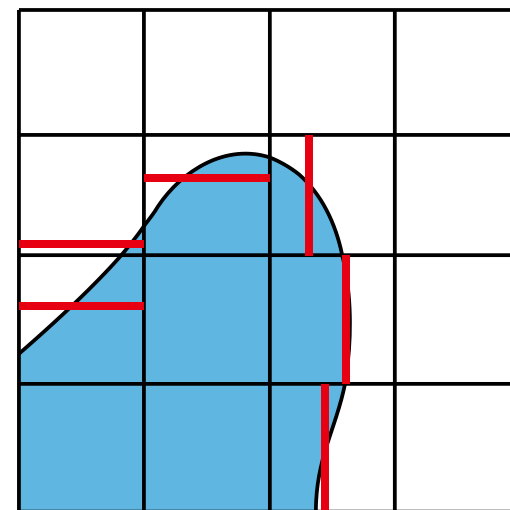
$$\vec{n} = (n_x, n_y) = \nabla \tilde{C}$$

(2) 确定界面位置；

### 1) Hirt 和 Nichols 的重构方案

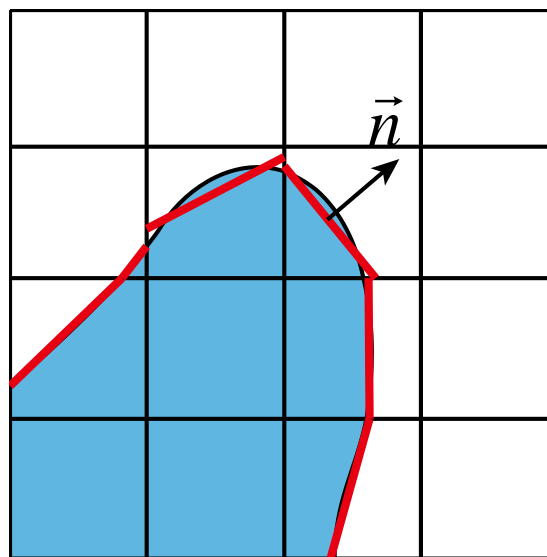
将一个网格内的相界面重构为一个**线段**。线段的方向为**二选一**：要么水平，要么竖直。线段方向的选择取决于界面法方向的哪一个分量更大。

这是一种比较粗糙的界面重构方法。



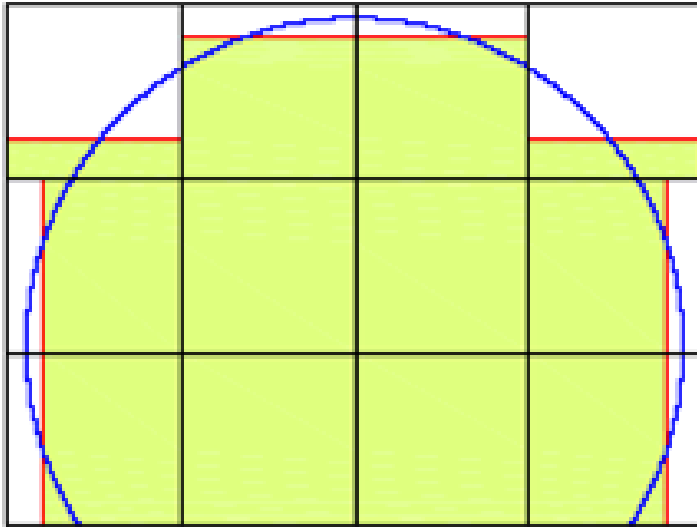
## 2) Piecewise Linear Interface Calculation (PLIC) 重构方案

将一个网格内的相界面重构为一个**线段**。线段可以是**任意坡度**，线段与界面法线方向垂直。

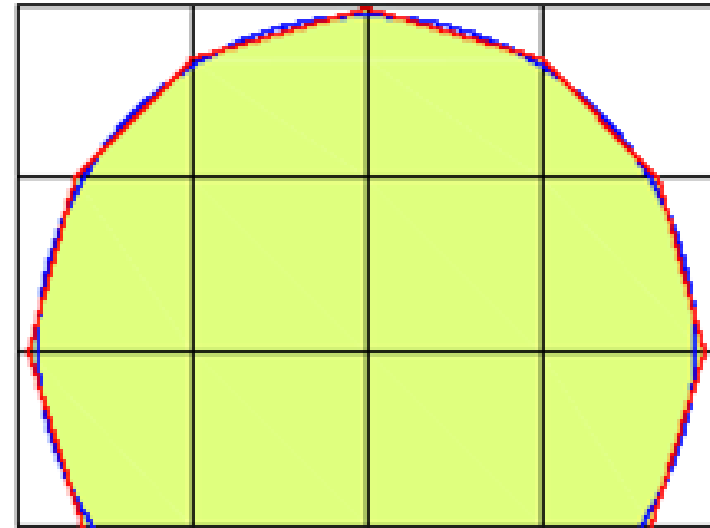


PLIC重构界面的关键在于准确的计算**界面方向**。

目前，PLIC仍是使用最广泛的VOF界面重构方法。



**(a) Hirt/Nichols**



**(b) PLIC method**

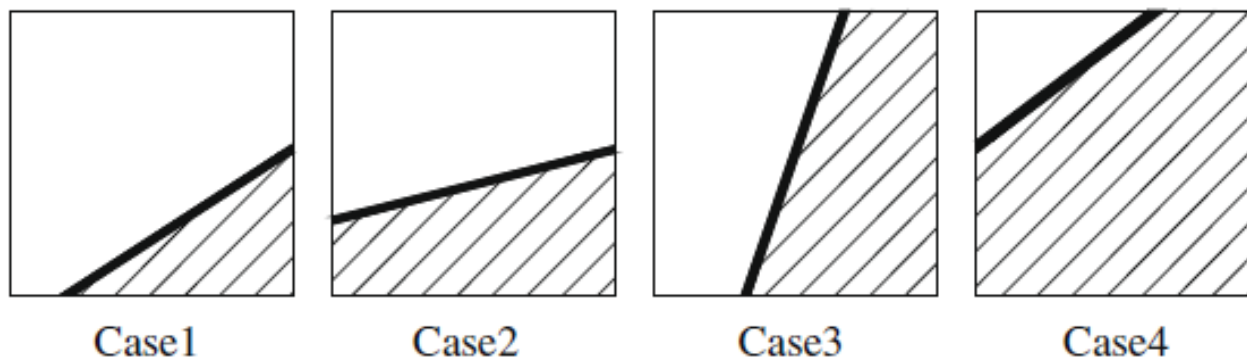
Blue line is the actual interface, red ones the are reconstructed

The disadvantage of VOF is that the interface curvature can not be determined accurately. For this purpose the Level Set is introduced.

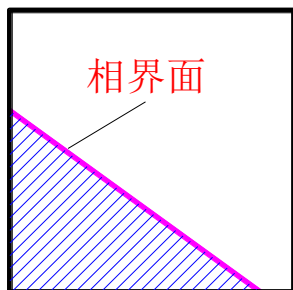
## 6.2.4. PLIC方法

### 1. 界面重构

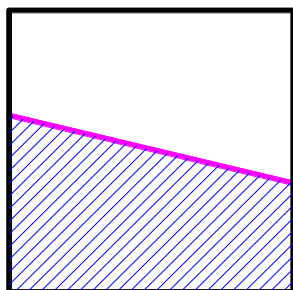
在二维问题中相界面在控制容积中的位置有16种可能的情况，取决于其表面外发线的值  $(n_x, n_y)$ ；例如对  $n_x < 0, n_y > 0$  有以下四种情况



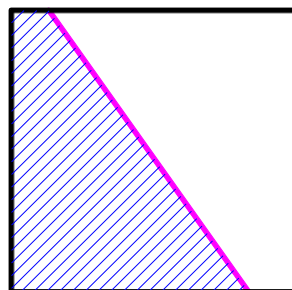
通过对界面方向进行翻转，可均化归为  $n_x > 0, n_y > 0$  的问题，可能的界面形状只有以下四种类型：



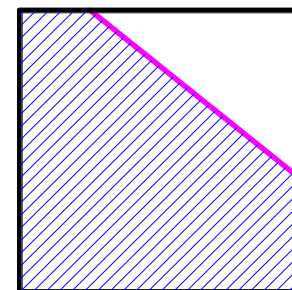
(a) 类型1



(b) 类型2



(c) 类型3



(d) 类型4

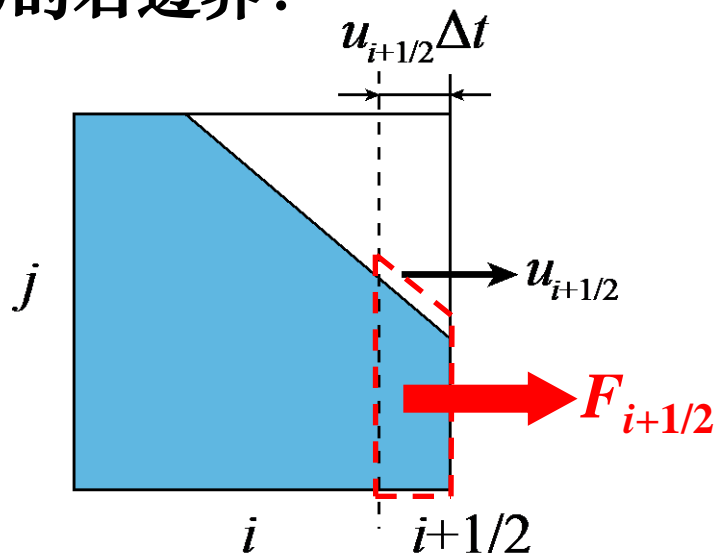
对于每一类型的界面，都可以根据以下条件用几何的方法确定其位置：

- (1) 相界面垂直于法线  $(n_x, n_y)$ ;
- (2) 阴影部分面积比等于流体体积函数;

据此，可求出线段的两个端点，也就完成了界面重构。

## 2. 界面推进

考虑网格 $(i,j)$ 的右边界:



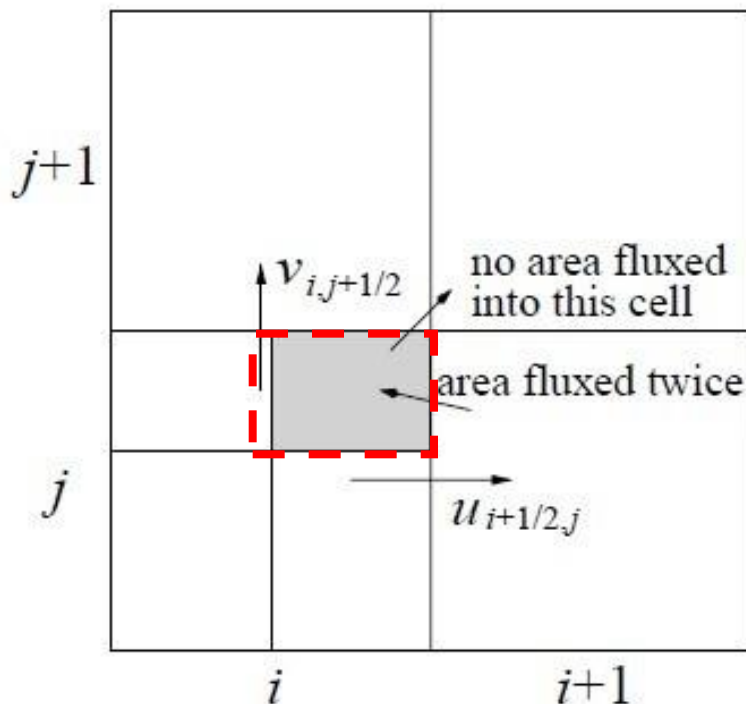
如果 $u_{i+1/2} > 0$ , 红色虚线部分流体从右边界流过界面;

如果 $u_{i+1/2} < 0$ , 在网格 $(i+1,j)$ 中计算界面 $i+1/2$ 上流入的流量。

用同样的方法计算网格上、下、左边界主相流体的流出量:

$$C_{i,j}^{t+\Delta t} = C_{i,j}^t + \left( F_{i-1/2,j} - F_{i+1/2,j} + F_{i,j-1/2} - F_{i,j+1/2} \right) / \Delta V$$

这是一种方向分裂 (split) 推进算法，不足之处在于一部分体积被重复计算。



虚线所示面积被重复计算。

G. Tryggvason, R. Scardovelli, S. Zaleski, Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows, Cambridge University Press, New York, 2011

目前已发展出基于许多PLIC的非分裂(**unsplit**)推进算法,  
例如:

**J. L ópez, J. Hern ández, P. G ómez, F. Faura, A volume of fluid method based on multidimensional advection and spline interface reconstruction, J. Comput. Phys, 195, 718-742, 2004**

**J. Hern ández, J. L ópez, P. G ómez, F. Faura, A new volume of fluid method in three dimensions. Part I: Multidimensional advection method with face-matched flux polyhedra, Int. J. Numer. Meths. Fluids, 58, 897-921,2008**

论文的作者也公布了他们的计算程序:

**VOFTools, a package of FORTRAN subroutines with analytical and geometrical tools for 2D/3D VOF methods in general grids**  
<http://www.dimf.upct.es/personal/lrj/voftools.html>

## 6.3 Level Set 方法简介

### 6.3.1 符号距离函数

### 6.3.2 符号距离函数在两相流模拟中的应用

### 6.3.3 用 Level Set 函数追踪相界面

## 6.3 Level Set 方法简介

### 6.3.1 符号距离函数

Level Set方法用一个连续函数  $\phi$  (level set函数)的零等值面表示相界面。用其正负表示位于哪一相。

$$\phi > 0$$

表示位于主相中

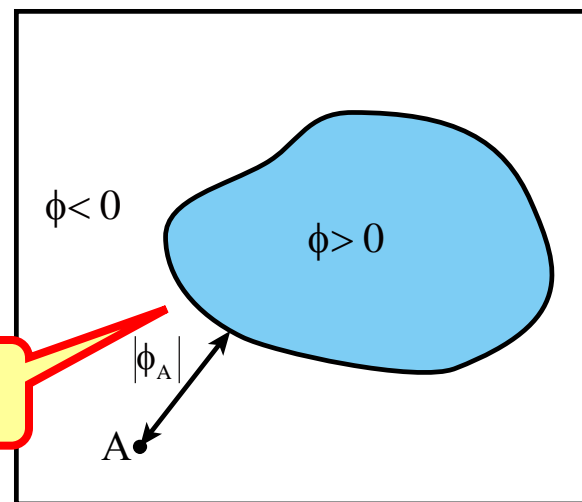
$$\phi < 0$$

表示位于另一相中

$$\phi = 0$$

表示位于相界面上

相界面

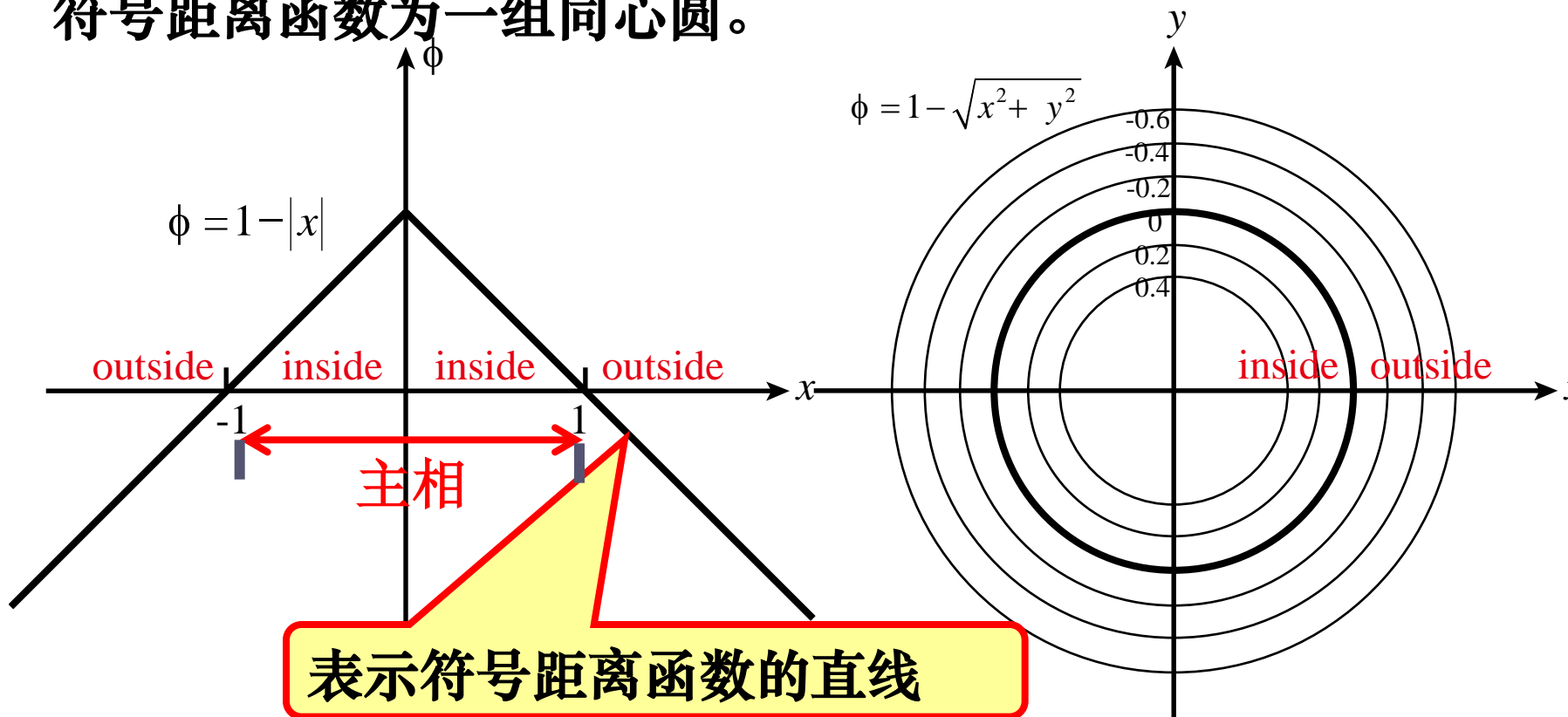


**符号距离函数 (Signed Distance Function)**就是一种Level Set函数。对于某一点的符号距离函数，其绝对值等于这个点到相界面的**最近距离**，符号则取决于这个点位于哪一相。

用两个例子来说明**符号距离函数**。

- (1) 一维区域，主相占据  $[-1, 1]$  区间；
- (2) 二维区域，主相占据以原点为圆心，半径为 1 的圆内部。则

符号距离函数为一组同心圆。



表示符号距离函数的直线

符号距离函数的特点:

(1) 在相界面附近**连续光滑**;

(2)  $|\nabla \phi| = 1$  距离对距离求导数!

## 6.3.2 符号距离函数在两相流模拟中的应用

### 1. 计算界面方向与曲率

符号距离函数可以用于计算界面方向与曲率:

$$\vec{n} = \nabla \phi \quad \kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

由于符号距离函数在相界面附近连续光滑的特点, 用其计算界面曲率与方向与曲率比用流体体积函数要准确的多。

## 2. 光顺化的Heaviside函数

用符号距离函数可以定义**光顺化的Heaviside函数**:

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & (\phi < -\varepsilon) \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\phi}{\varepsilon} - \frac{1}{\pi} \sin(\pi\phi / \varepsilon) \right] & (|\phi| \leq \varepsilon) \\ 1 & (\phi > \varepsilon) \end{cases}$$

$\varepsilon$  表示界面处光顺化的宽度，一般取  $1.5\Delta$  ( $\Delta$ 为网格尺寸)

## 3. 设置两相流的物性分布

利用光顺化的Heaviside函数 $H$ 和两相的物性可以设置对计算区域的物性分布:

$$\rho = \rho_g (1 - H_\varepsilon(\phi)) + \rho_l H_\varepsilon(\phi)$$

$$\eta = \eta_g (1 - H_\varepsilon(\phi)) + \eta_l H_\varepsilon(\phi)$$

以这种物性来算流场以考虑存在两相的事实。

## 4. 计算表面张力

气液两相流的模拟还需要考虑相界面上的表面张力。**CSF (Continuum surface force)** 模型可以把表面张力转换为相界面附近控制容积中的体积力，并用符号距离函数计算：

$$F_{sv} = -\sigma\kappa(\phi)\nabla H(\phi)$$

$\sigma$  为表面张力系数；

$\kappa(\phi)$  为界面曲率，通过符号距离函数计算；

$\nabla H(\phi)$  为界面  $H$  函数的梯度。

**符号距离函数**还直接表示了节点到相界面的距离。因此，符号距离函数为两相流的直接模拟提供了很多方便，是首选的 **Level Set** 函数。

### 6.3.3 用Level Set函数追踪相界面

Level Set函数的推进也可表示为纯对流方程：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi = 0$$

Level Set方法求解时，一般初始设置了符号距离函数，但是在推进过程中距离函数的特征会改变。因此，在每一个时层完成推进后，一般还需求解**重新初始化(Reinitialization)**方程，将Level Set 函数恢复为符号距离函数。

符号距离函数应该满足： $|\nabla \phi| = 1$

可以构造一个非稳态项进行重新初始化，使得最终的稳态解满足符号距离函数的要求：

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 1 - |\nabla \phi|$$

$\tau$  为虚拟的时间；接近稳态时，非稳态项接近于0，梯度接近1；

为了保证 Level Set函数的零等值面重新初始化的过程中不发生变化，还需添加一函数 $S$ ：

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = S(\phi_0) (1 - |\nabla \phi|)$$

其中  $S(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + \varepsilon^2}}$   $\varepsilon$  通常取一个网格的长度。

S. Osher, R. Fedkiw, Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces, Springer, 2002

对  $\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = S(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|)$  的理解

如果一个节点与界面很靠近，也就是  $\phi_0$  接近于0，则

$S(\phi_0) = \phi_0 / \sqrt{\phi_0^2 + \varepsilon^2}$  就接近于0，根据这个节点的重新初始

方程： $\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = S(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|)$   $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$  就会趋近于0；这个节点的

**Level set** 函数在初始化过程中基本保持不变，也就是界面附

近节点上的**Level set** 函数基本保持不变，保证了界面的位置

不变；在离界面较远的节点上， $|\phi_0| \gg \varepsilon$ ，

$$s(\phi_0) = \phi_0 / \sqrt{\phi_0^2 + \varepsilon^2} \approx 1$$

重新初始化的方程接近于  $\partial \phi / \partial \tau = 1 - |\nabla \phi|$  保证了稳态时

符号距离函数的梯度为1.

**重新初始化**方程的求解目标是使Level Set函数在零等值面不改变的情况下满足  $|\nabla \phi| = 1$ ，恢复为符号距离函数。

求解重新初始化方程能改善Level Set方法的总体质量守恒性。

Level Set 推进方程和重新初始化方程的求解一般采用**高阶的ENO(Essential Non-Oscillatory) 格式**。重新初始化的方程也是一个纯对流方程！

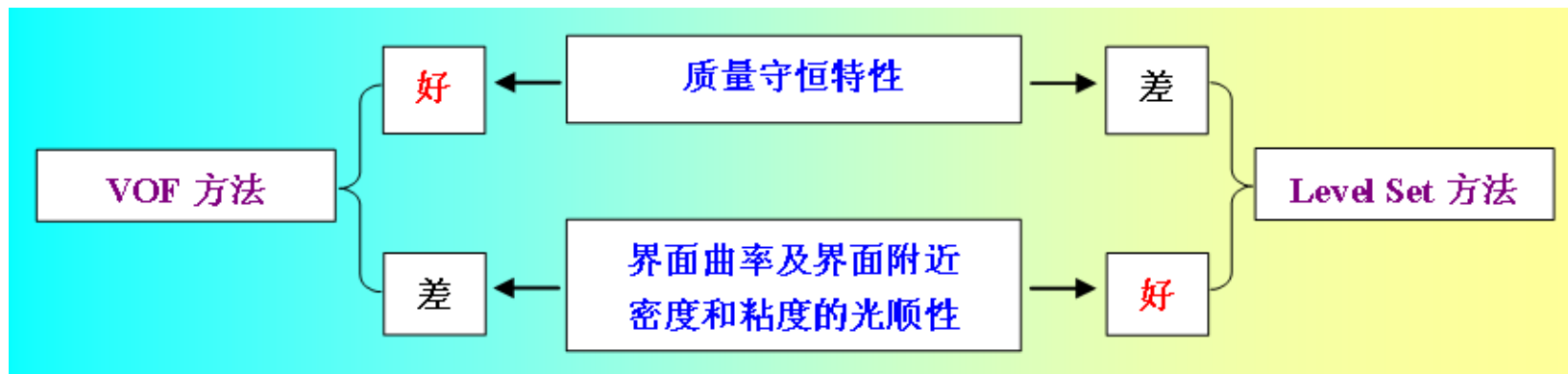
Level Set 方法的一个优势是**简单方便**，从二维到三维的推广也十分容易。因此在更复杂的两相流（例如相变）模拟应用广泛。

Level Set方法的缺点是：仅追踪  $\phi = 0$  的等值面，难以保证相的总体质量守恒性。

A Harten , B Engquist, S. Osher, et al., Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes , *J. Comput Physics*, 1987, 71:231-303

## 6.4 VOSET方法的基本思想

VOF方法和Level Set方法各有优缺点，而且正好互补。



如果能够同时拥有VOF中的**流体体积函数**和Level Set中的**符号距离函数**，就可以让它们发挥各自的优势，执行各自“擅长”的任务。

D.L. Sun, W.Q. Tao, A coupled volume-of-fluid and level set method (VOSET) for computing incompressible two-phase flows, Int. J. Heat Mass Transfer, 53, 645-655, 2010

流体体积函数负责**界面重构与界面推进**，保证总体质量守恒性。

符号距离函数负责计算**界面方向与曲率**，计算**表面张力**，设置**物性**。

VOSET用流体体积函数追踪相界面，但同时根据流体体积函数，用**几何方法**生成一个与之相对应的符号距离函数。这样VOSET就能同时具备VOF和Level Set方法的功能。

VOSET不是第一个将VOF及Level set 结合起来的方法，此前有Sussman (2000) 提出的CLSVOF方法及其以后的各种改进；但是在该系列方法中同时求解VOF及Level set 函数两个微分方程，使得计算工作量及复杂程度显著增加。VOSET方法中只求解流体体积函数，但用几何方法生成距离函数。

## 6.5 VOSET方法中距离函数的计算

### 6.5.1 迭代计算的思路

### 6.5.2 计算符号距离函数的几何方法

### 6.5.3 示例

## 6.5 VOSET方法中距离函数的计算

### 6.5.1 迭代计算的思路

#### 1. 为什么要迭代

界面方向与符号距离函数有相互依赖的关系：

(1) 知道了界面方向，就可以用PLIC方法重构相界面。

(2) 获得重构界面后，就可以用几何方法计算符号距离函数。而通过距离函数又可以求出更准确的界面方向。

PLIC界面重构和计算距离函数的准确性都要求有**准确的界面方向**。因此需要用**迭代**的方法计算符号距离函数。

## 2. 如何迭代

在没有符号距离函数的时候，首先用**流体体积函数**计算一个初始的、粗略的界面方向，在此基础上，重复以下过程：

(1) 用PLIC重构相界面；

(2) 根据重构界面，用几何方法计算符号距离函数；

(3) 用符号距离函数计算界面方向；

这些过程一般需要迭代三次，以得到准确的界面方向。

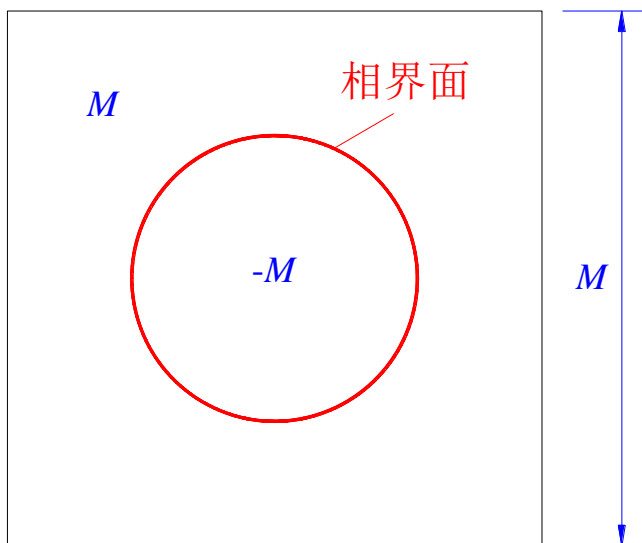
前面已介绍过程 (1) 和 (3)，下面详细介绍计算符号距离函数的几何方法。



## 6.5.2 计算符号距离函数的几何方法

这里假定已用PLIC方法获得重构界面。

**步骤 1:** 在整个计算区域内为符号距离函数赋初始值

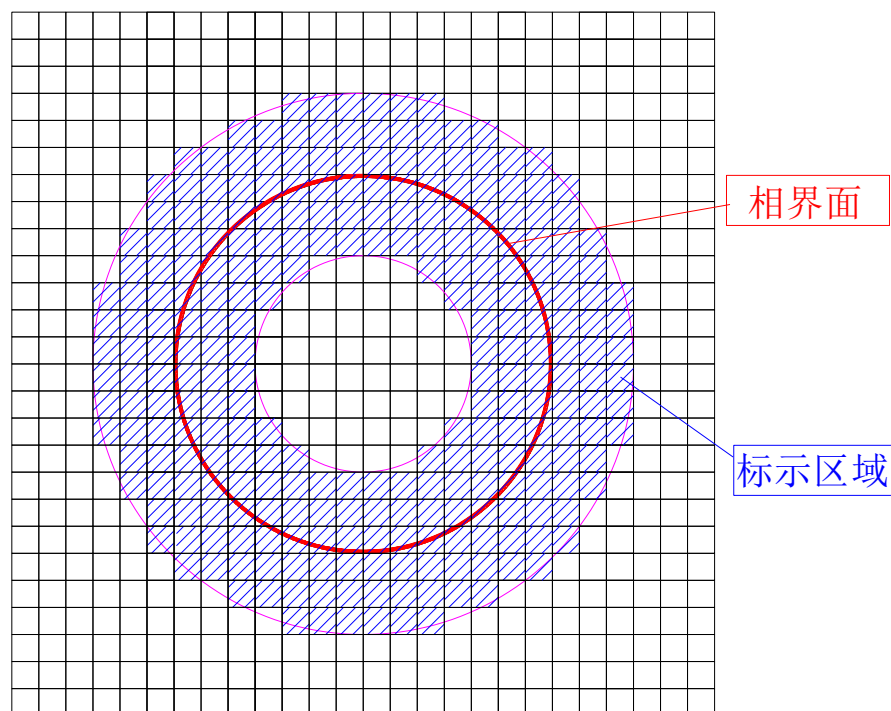


$$\phi_{i,j}^0 = \begin{cases} -M & \text{if } C_{i,j} \geq 0.5 \\ M & \text{if } C_{i,j} < 0.5 \end{cases}$$

$M$ 为计算区域内的最大几何长度，这样可以保证界面附近精确的符号距离函数包含在设定的初值范围之内。

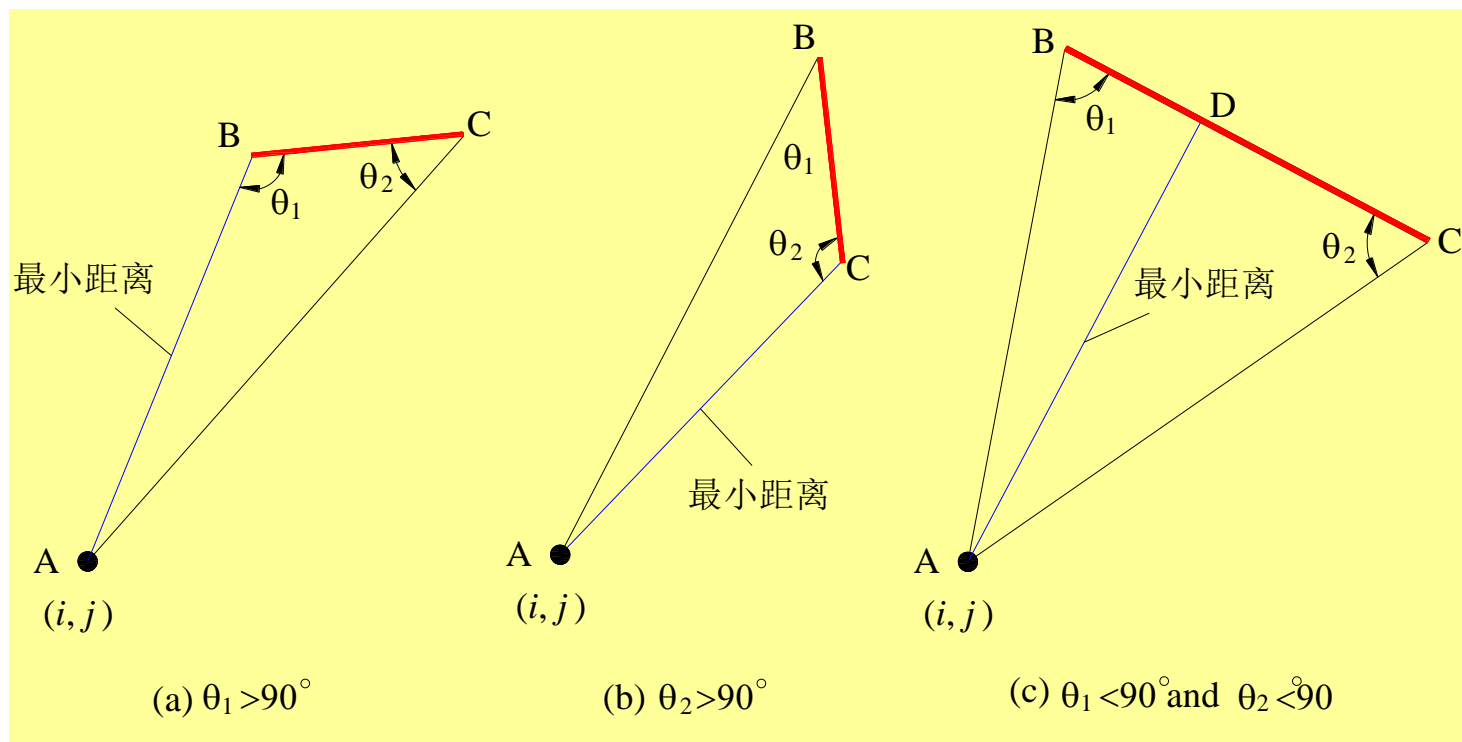
## 步骤 2: 标记界面附近的计算网格

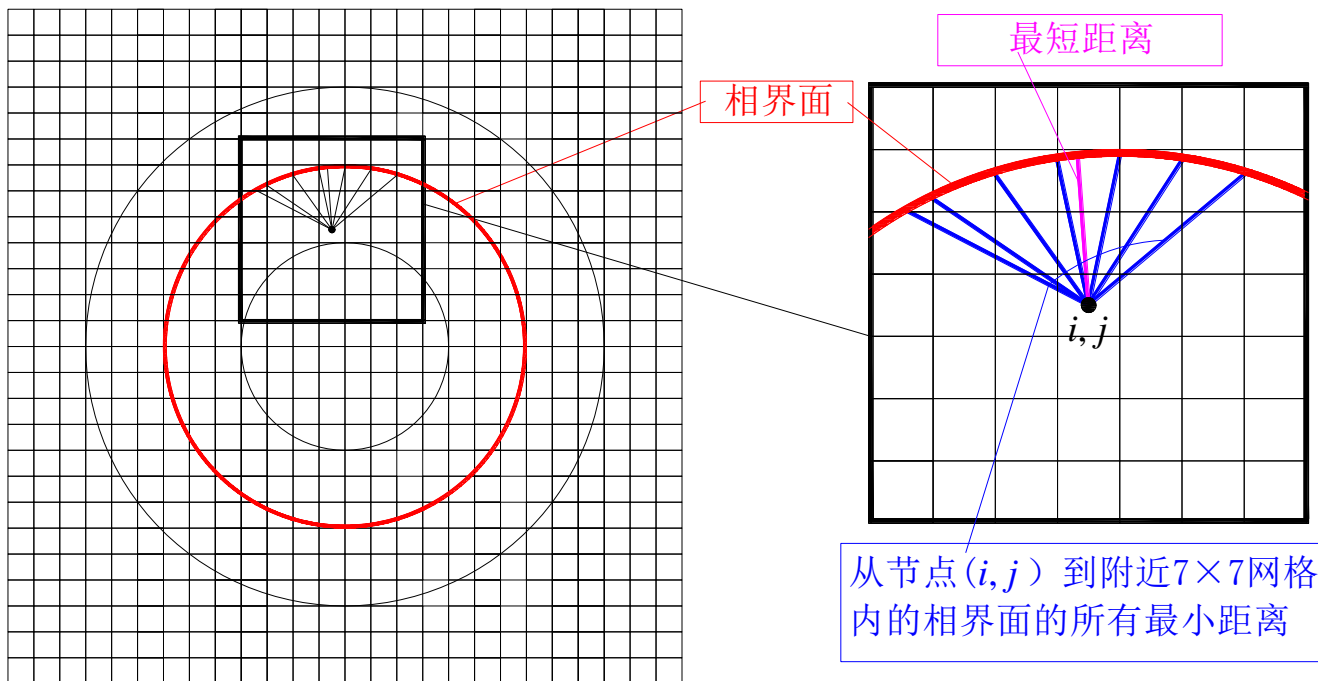
标记相界面一定距离范围（例如：三个网格长度）之内的网格。这一步的目的是为了**减少计算量**。因为实际计算中两相流数值模拟只需要相界面附近的符号距离函数。



### 步骤 3: 计算被标记的网格中心与相界面的距离

假设A ( $i, j$ )是一个被标记的计算网格，在A的三个网格长度的范围内搜寻带有相界面的网格。此时相界面已重构为一个**线段**(BC)。于是可利用一个**三角形**( $\Delta ABC$ )计算给定点到这个线段的**最短距离**。





在完成了节点  $(i, j)$  附近相界面的搜寻、并求出A与这些线段之间的最短距离之后，从这些最短距离中**选出最小值**。这个值就是点A到相界面的**最短距离** $d$ ，也就是节点  $(i, j)$  的**符号距离函数的绝对值**。

## 步骤4: 设置距离函数的符号

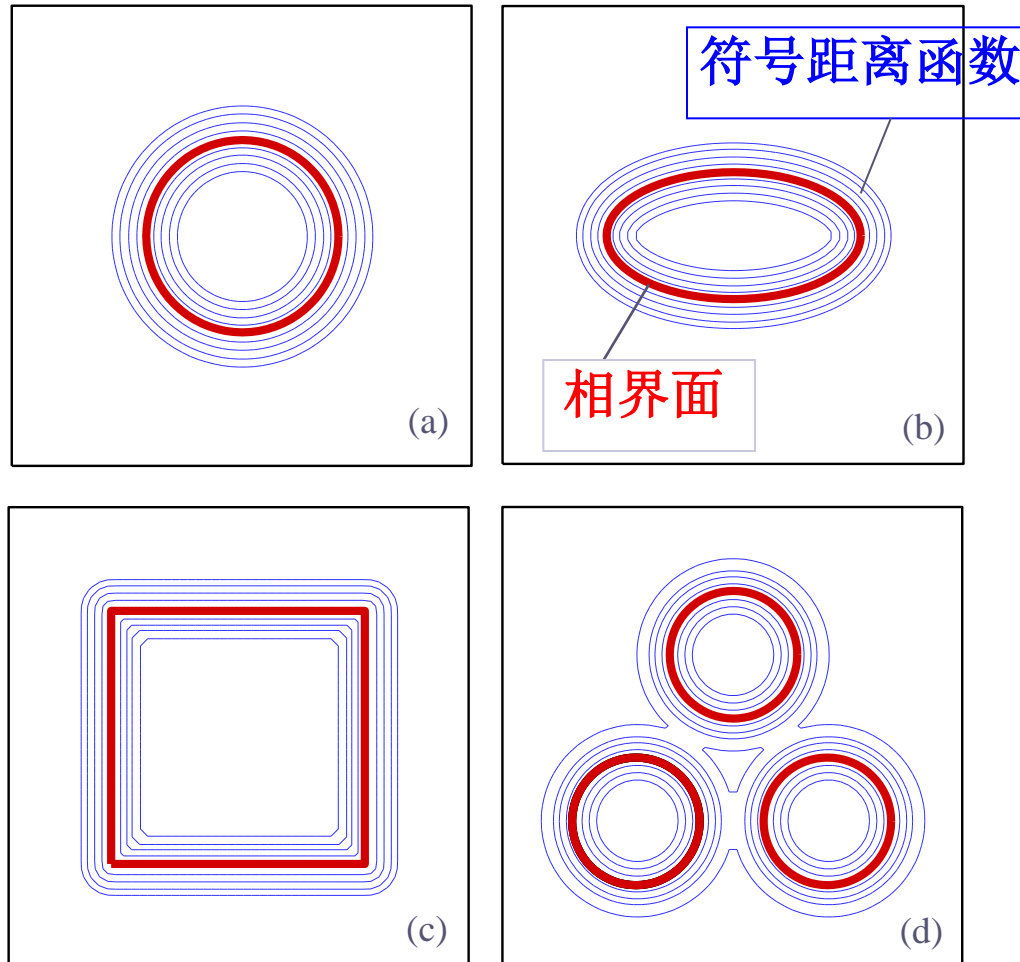
一个点的符号距离函数的正负取决于这个点位于哪一相中。

符号可以用流体体积函数来判定。如果一个网格主相流体占据的体积超过一半，就可以认为这个网格的中心位于主相内，反之则位于另一相中。因此：

$$\phi_{i,j} = \begin{cases} -d & \text{if } C_{i,j} > 0.5 \\ 0 & \text{if } C_{i,j} = 0.5 \\ d & \text{if } C_{i,j} < 0.5 \end{cases}$$

### 6.5.3 示例

以下是迭代几何方法得到的不同形状相界面附近的符号距离函数。



## 6.6 采用VOSET方法求解气液两相流问题

### 6.6.1 控制方程

### 6.6.2 求解步骤

## 6.6 采用VOSET方法求解气液两相流问题

### 6.6.1 控制方程

流体体积函数方程

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}C) = 0$$

连续性方程

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

动量方程

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \mu (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) + \rho \vec{g} + \sigma \kappa \nabla H$$

重力

表面张力

密度，粘性，表面张力均由Level set函数计算。

Level set函数是用几何方法根据流体体积函数直接求得，因此不需要求解其Level set函数的推进方程。

## 6.6.2 求解步骤

给定初始流体体积函数 $C^0$ ，初始速度 $u^0, v^0$ ；

在第  $n$  个时层的推进步骤如下：

(1) 用 PLIC 方法，根据流体体积函数 $C^n$ 重构界面，并用几何方法计算相应的Level set函数；

(2) 根据Level set函数计算物性分布和表面张力；

(3) 用某种流场求解算法（SIMPLER/IDEAL/Projection算法）求解下一时层的速度场  $u^{n+1}, v^{n+1}$ 和压力场  $p^{n+1}$ ；

(4) 用PLIC方法推进界面，据重构界面及计算得到的界面速度，计算下一时层流体体积函数 $C^{n+1}$ ；

## 6.7 数值计算实例

6.7.1 用不同的方法计算圆的曲率

6.7.2 椭圆形气泡的震荡

6.7.3 单个气泡的上升

6.7.4 异轴两个气泡在静止液体中的上升和溶并过程

6.7.5 液柱倒塌（溃坝）过程

## 6.7 数值计算实例

### 6.7.1 用不同的方法计算圆的曲率

给定一个半径为 1 的圆，分别用 VOF, Level Set, VOSET 在不同网格尺寸下计算圆的曲率。同时 VOSET 在迭代求解符号距离函数中选择了不同的迭代次数： $N = 1, 2, 3$ 。比较这些方法计算的曲率误差的大小。

圆的曲率与半径满足： $\kappa_{\text{exact}} R = 1$

$L_2$  误差的定义：

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (\kappa R - \kappa_{\text{exact}} R)^2}{M}}$$

$\kappa$  为计算得到的曲率。

$\Delta x$	VOF $L_2$	LS $L_2$	VOSET		
			N=1 $L_2$	N=2 $L_2$	N=3 $L_2$
1/20	0.427	$2.010 \times 10^{-2}$	$4.504 \times 10^{-2}$	$5.362 \times 10^{-2}$	$5.470 \times 10^{-2}$
1/40	0.825	$4.347 \times 10^{-3}$	$5.721 \times 10^{-2}$	$5.712 \times 10^{-2}$	$5.855 \times 10^{-2}$
1/80	0.922	$1.030 \times 10^{-3}$	$8.351 \times 10^{-2}$	$4.678 \times 10^{-2}$	$4.729 \times 10^{-2}$
1/160	1.585	$2.536 \times 10^{-3}$	0.165	$4.033 \times 10^{-2}$	$3.628 \times 10^{-2}$
1/320	3.018	$6.329 \times 10^{-5}$	0.320	$5.311 \times 10^{-2}$	$3.926 \times 10^{-2}$
1/640	6.111	$1.570 \times 10^{-5}$	0.481	$6.898 \times 10^{-2}$	$3.709 \times 10^{-2}$

(1) VOSET 计算曲率的准确性优于 VOF

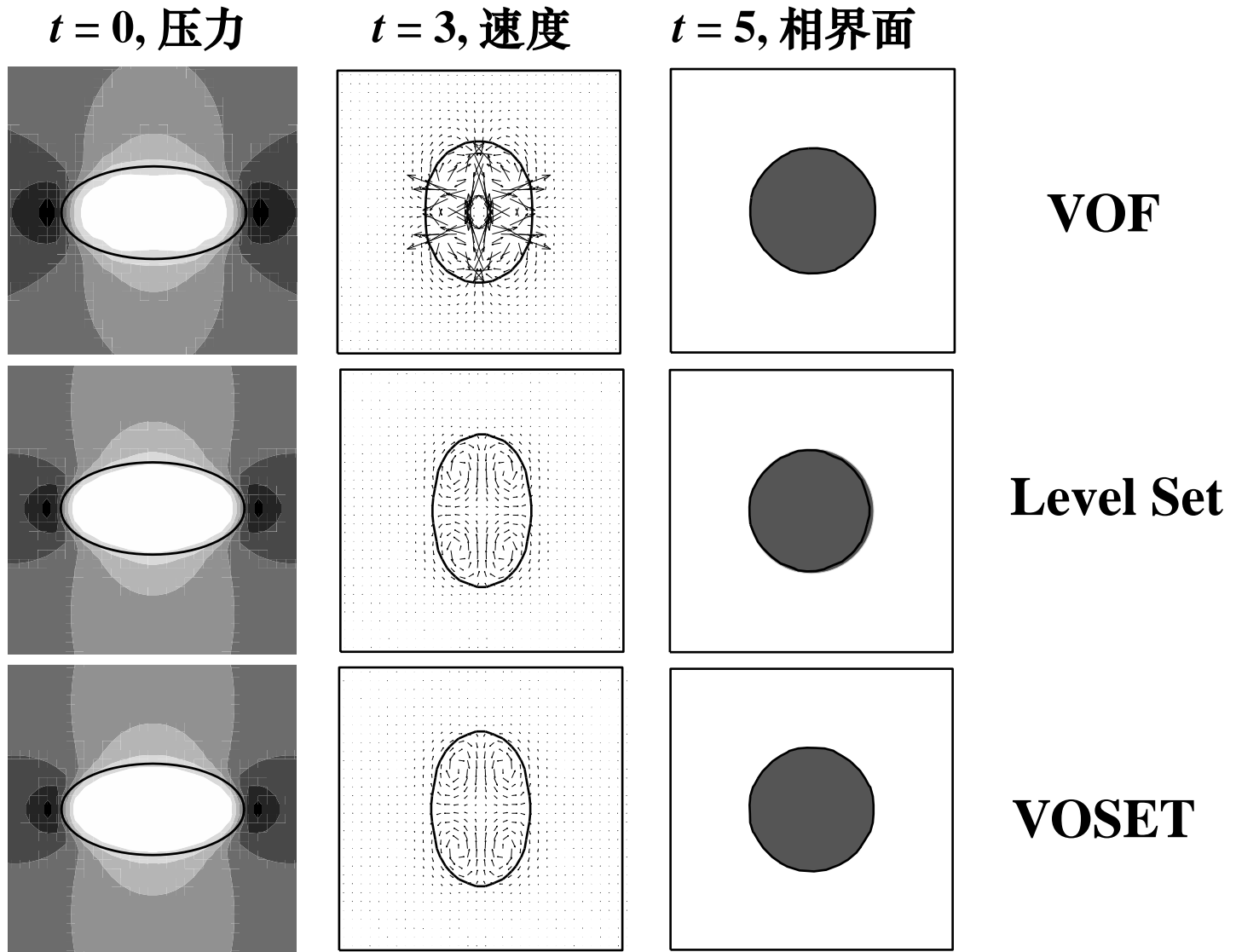
(2) 迭代次数增加, 计算曲率的准确性会提高

## 6.7.2 椭圆形气泡的震荡

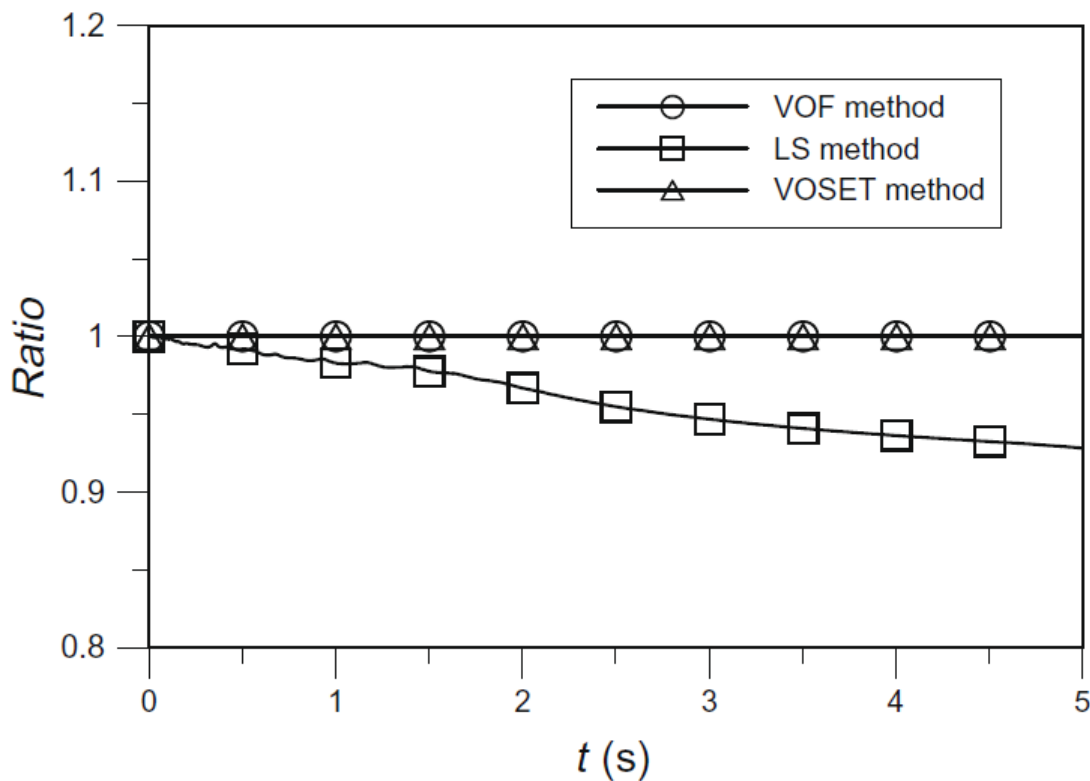
无重力的条件下，在**静止**的液体中放置一个初始的**椭圆**气泡。

椭圆界面上的曲率并不均匀，因此表面张力不均匀。不均匀的表面张力会导致气泡的震荡。

液体的**粘性**使震荡逐渐减弱，最终气泡会变成圆形并保持静止。



**VOSET继承了Level Set计算表面张力的准确性，优于VOF。**



$$\text{质量比率 (Ratio)} = \frac{\text{计算时刻主相流体的质量}}{\text{初始时刻主相流体的质量}}$$

**VOSET 继承了 VOF 的总体质量守恒性，优于 Level Set。**

## 6.7.3 单个气泡的上升

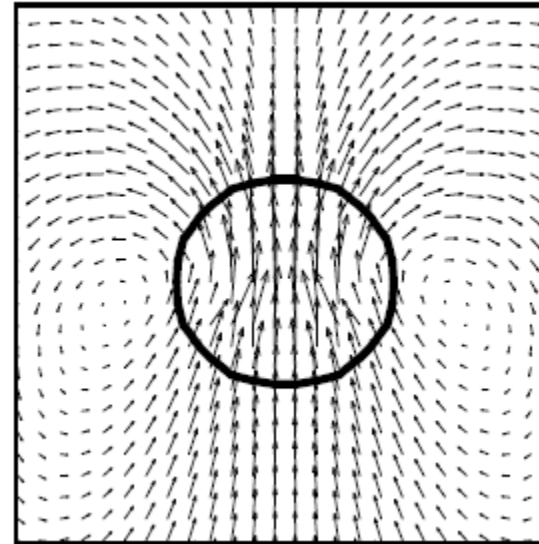
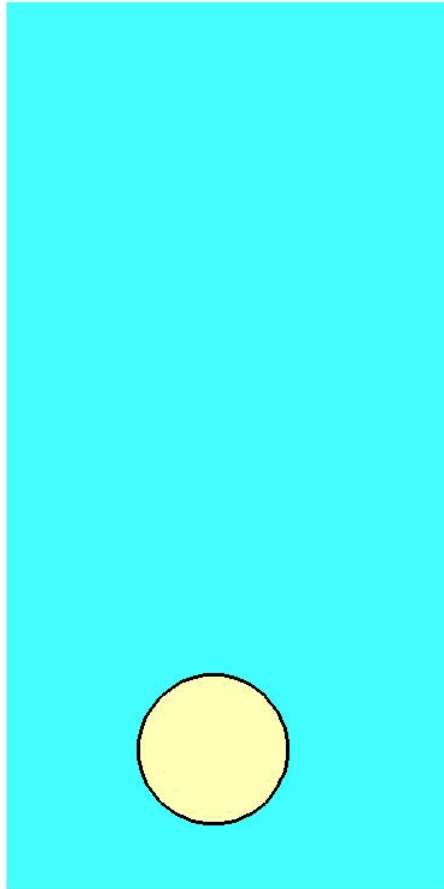
在静止的液体放置一个气泡，气泡在浮力的作用下上升。

气泡在上升的过程中受到**浮力**、**粘性力**和**表面张力**的共同作用，最终形成的稳定的气泡形状由无量纲数：**Morton number**和**Eotvos number**决定。

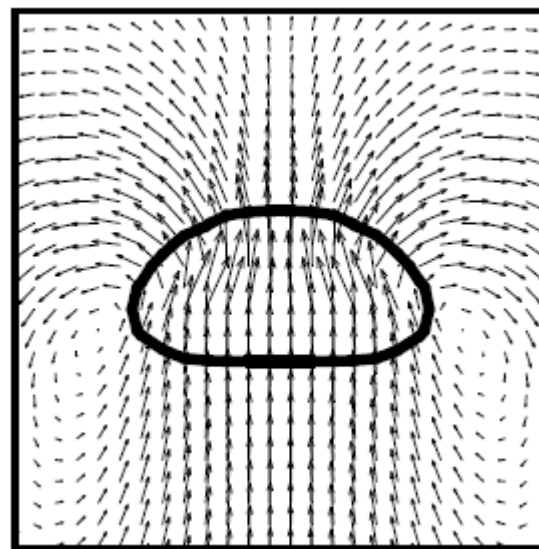
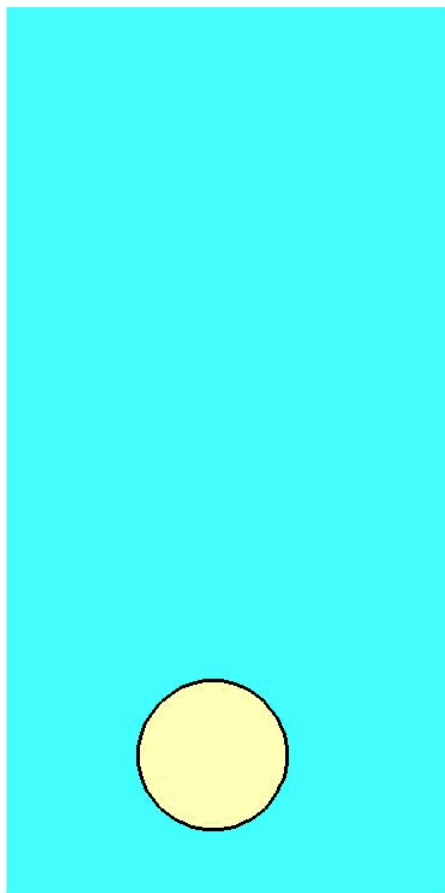
$M = g\eta_l^4 / \rho_l \sigma^3$       表征**粘性力**与**表面张力**的对比关系

$Eo = gd_e^2(\rho_l - \rho_g) / \sigma$       表征**浮力**与**表面张力**的对比关系

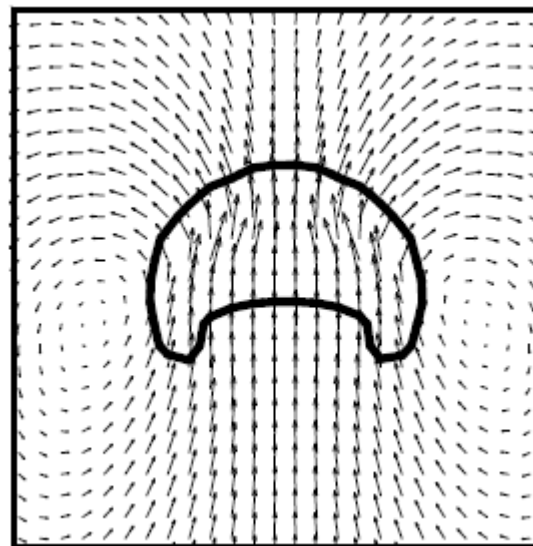
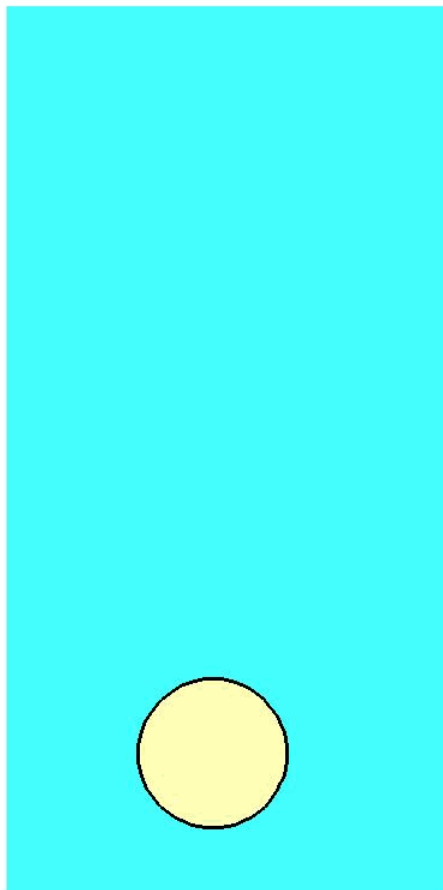
Case 1:  $Eo = 1.0$ ,  $M = 0.001$ , 会形成球圆形气泡



Case 2:  $Eo = 10.0$ ,  $M = 0.1$ , 会形成椭圆形气泡

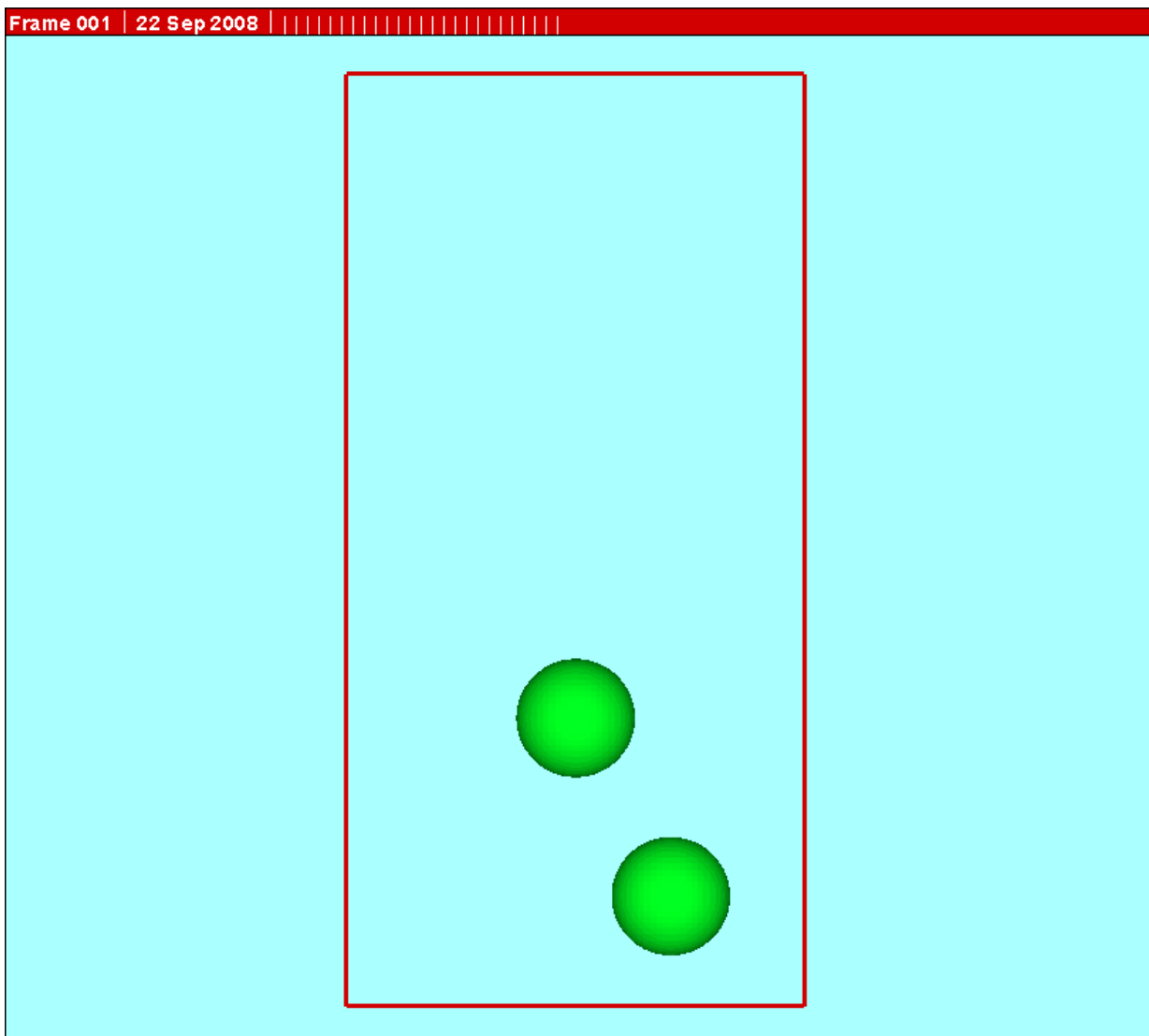


### Case 3: $Eo = 100.0$ , $M = 1000$ , 会形成球帽形气泡

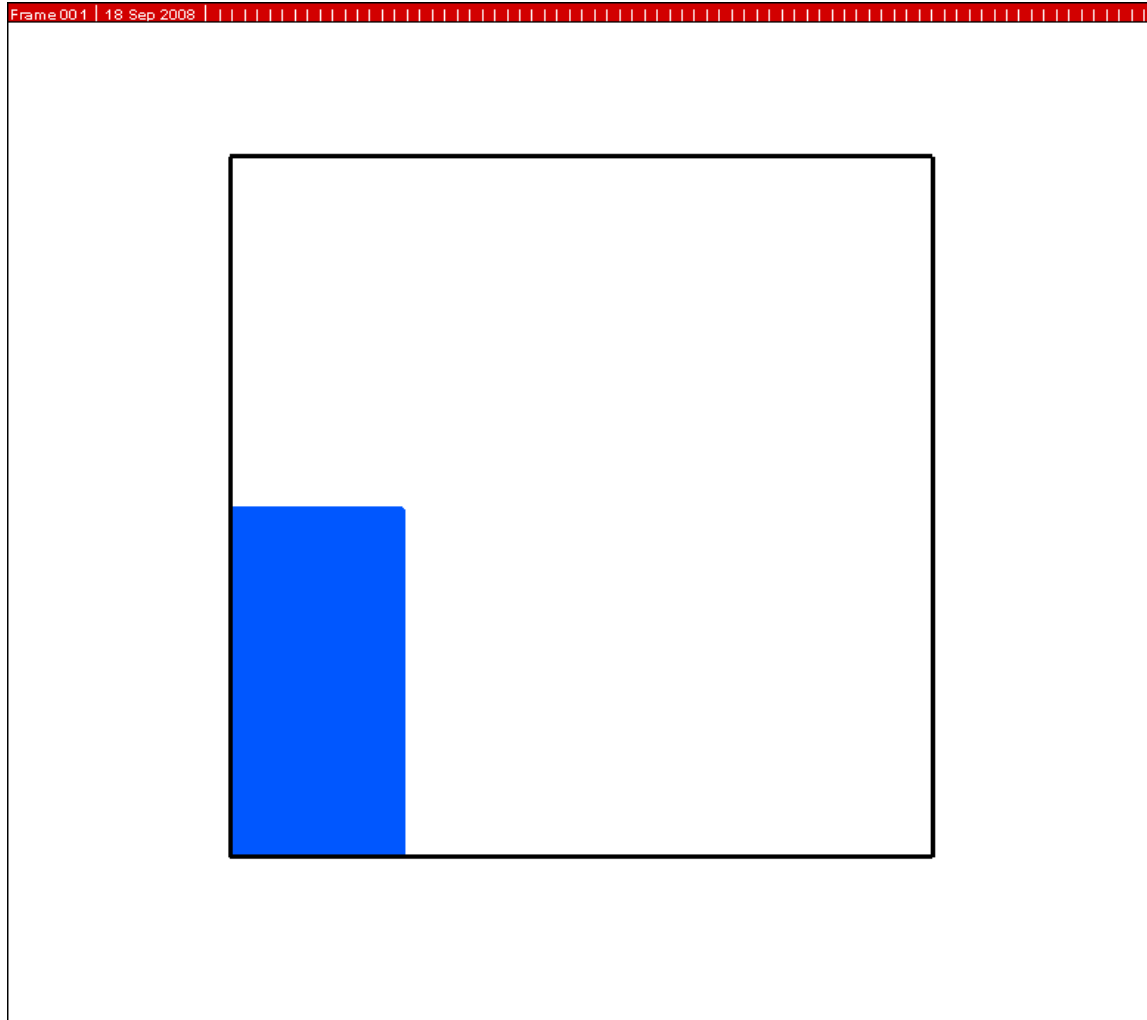




## 6.7.4 异轴两个气泡在静止液体中的上升和溶并过程



# 6.7.5 液柱倒塌（溃坝）过程



## 6.8 VOSET向三维的推广

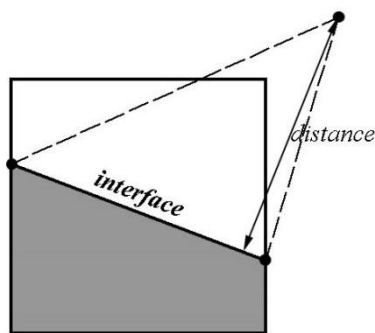
### 6.8.1 VOSET从二维推广到三维需要解决的问题

VOSET中重构相界面和计算符号距离函数都采用了几何方法，因此在二维中实施VOSET需要解决的是一个平面几何问题。

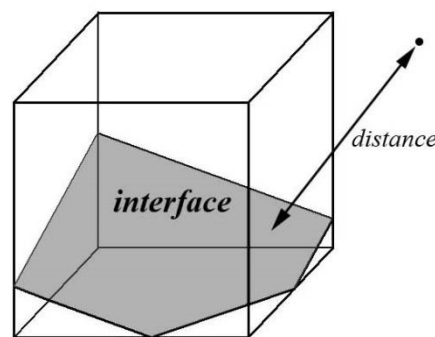
在三维坐标系中实施VOSET需要解决的是一个立体几何问题。因此，VOSET向三维推广的关键问题在于**如何解决更复杂的几何问题**。

根据 PLIC 的**分段线性**的重构的思想，一个二维的矩形网格中的相界面被重构为一个**线段**，而在三维的立方体网格中重相界面会被重构成为一个**多边形**。因此，三维中许多几何上的解决方案需要重新考虑。

二维



三维



## (1) 相界面的描述

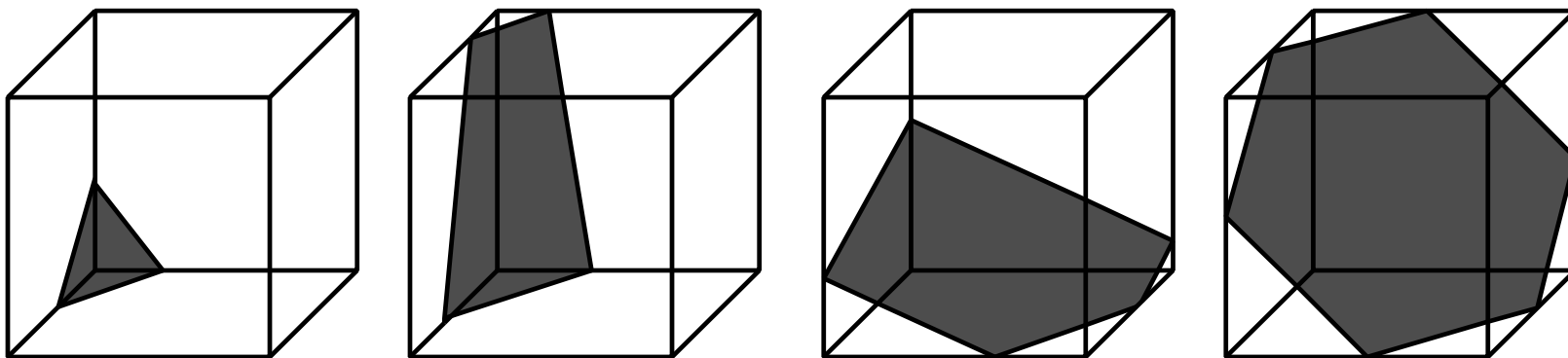
二维问题中用线段两个端点的坐标就可以描述重构相界面，三维中的重构相界面应该如何描述？

## (2) 计算点到相界面的最短距离

在二维中，通过解一个三角形就可以计算出一个点到相界面的最短距离，同样的问题在三维中应该如何计算？

### (3) 界面形状的分类

在二维中，界面与网格的四条边是否相交，只需要分为四种情况考虑。在三维中，多边形界面的边的数量是不定的，与网格的哪些面有交叉也是不定的，如果分类会产生比二维多得多的种类。能不能找到一种不需要对界面形状进行分类的算法？



## 6.8.2 三维VOSET应用例子

### 1 Cylindrical dam break

#### Conditions:

$$\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3 ; \rho_g = 1.25 \text{ kg/m}^3$$

$$\eta_l = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s} ; \eta_g = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

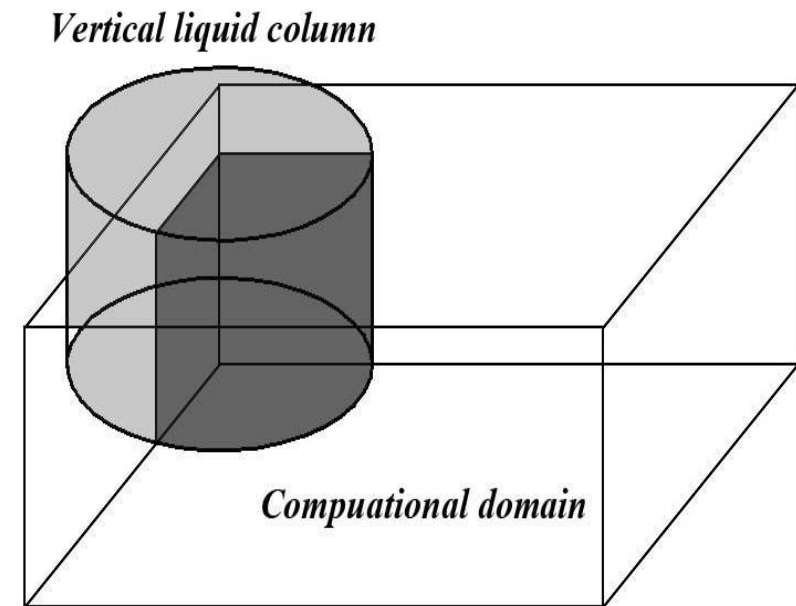
Coefficient of surface tension=  
0.072N/m

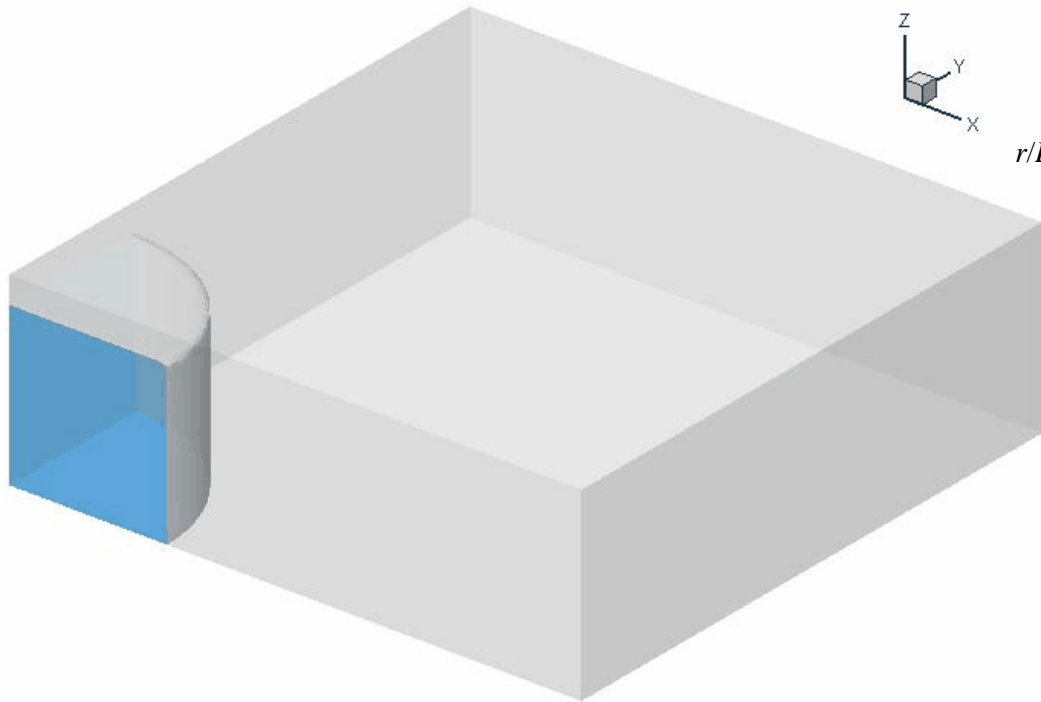
$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Radius and height  $L=2.25$  in

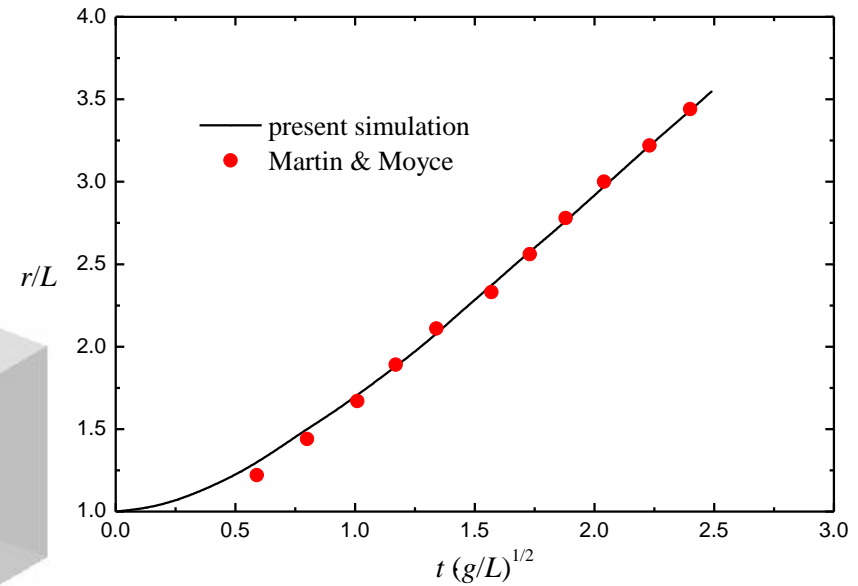
Domain :  $3.6L \times 3.6L \times 1.2L$

Grid :  $90 \times 90 \times 30$





Evolution process of interface



Base radius vs. time

## 2 Nucleate boiling within a micro-channel

### Conditions

Channel length:  $1000 \mu$  Channel width and height:  $200 \mu$

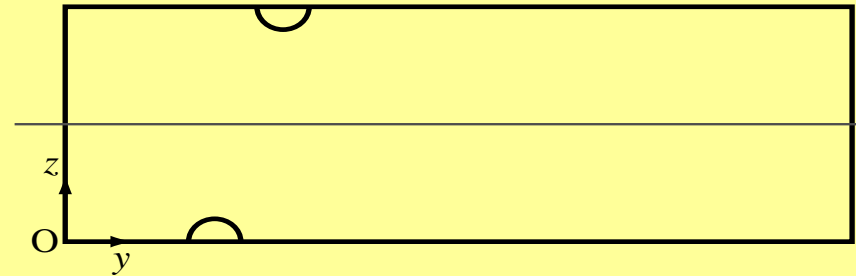
Water; Contact angle: 40 degrees;  $u_0 = 0.146 \text{ m/s}$ ;  $T_w - T_{\text{sat}} = 5\text{K}$

Initial position of bubbles

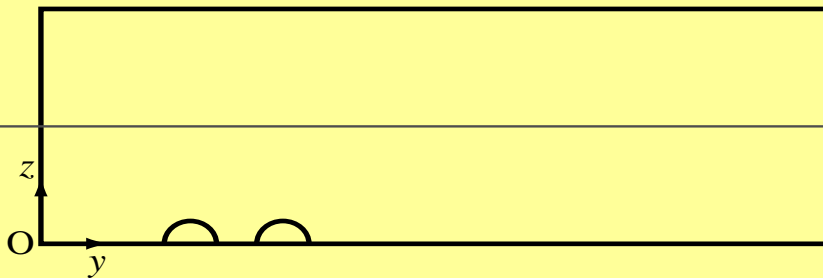
Case 1



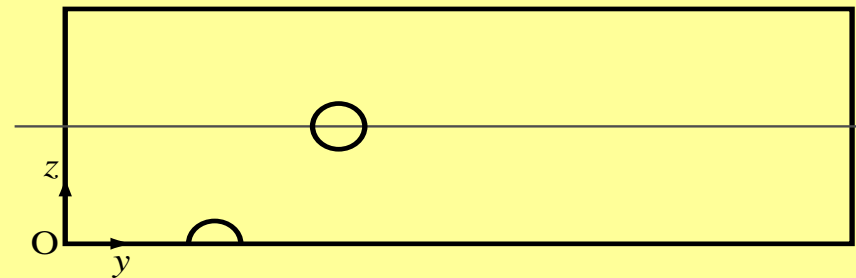
Case 2



Case 3

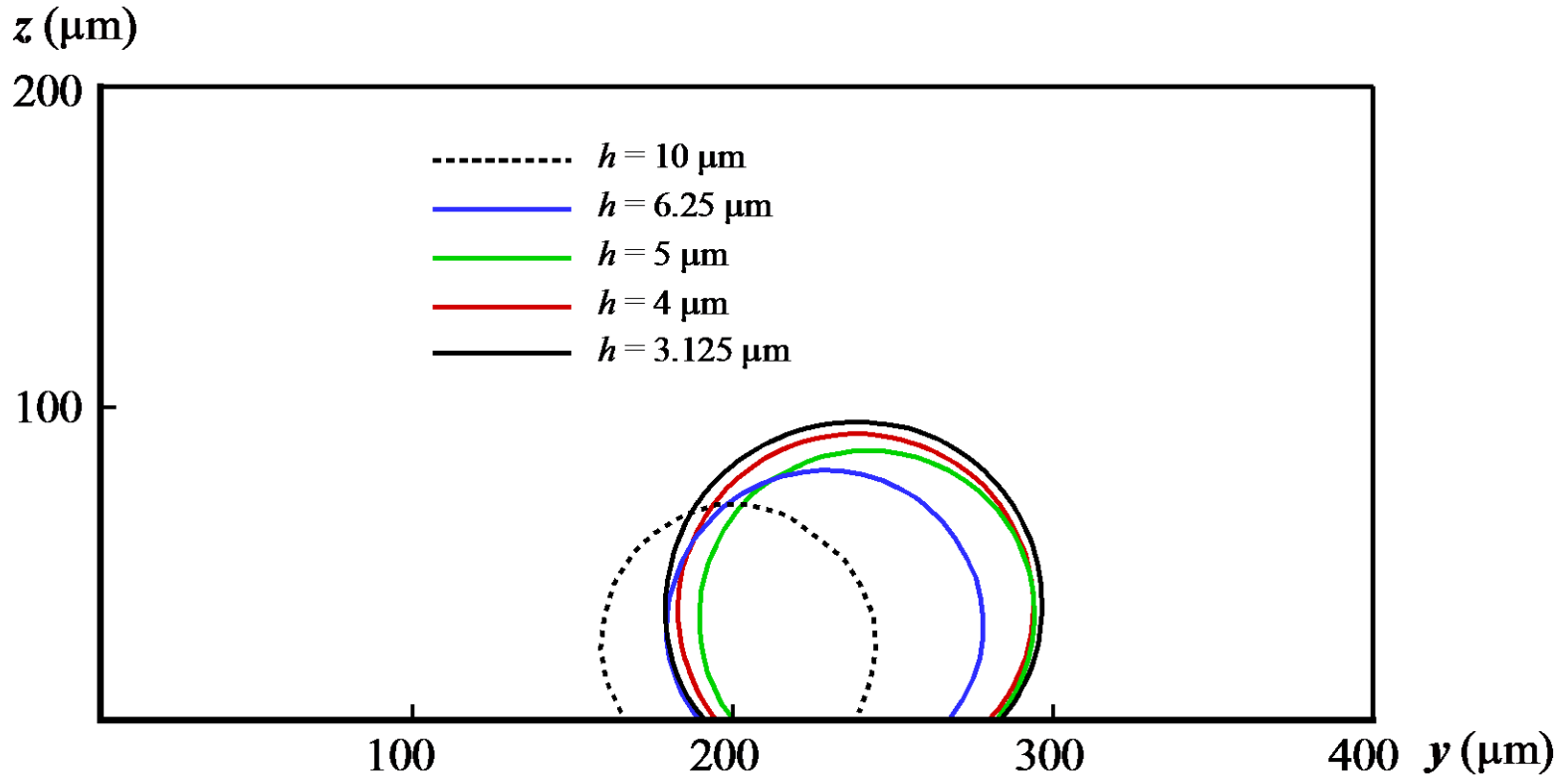


Case 4



# 1. Grid-independence test

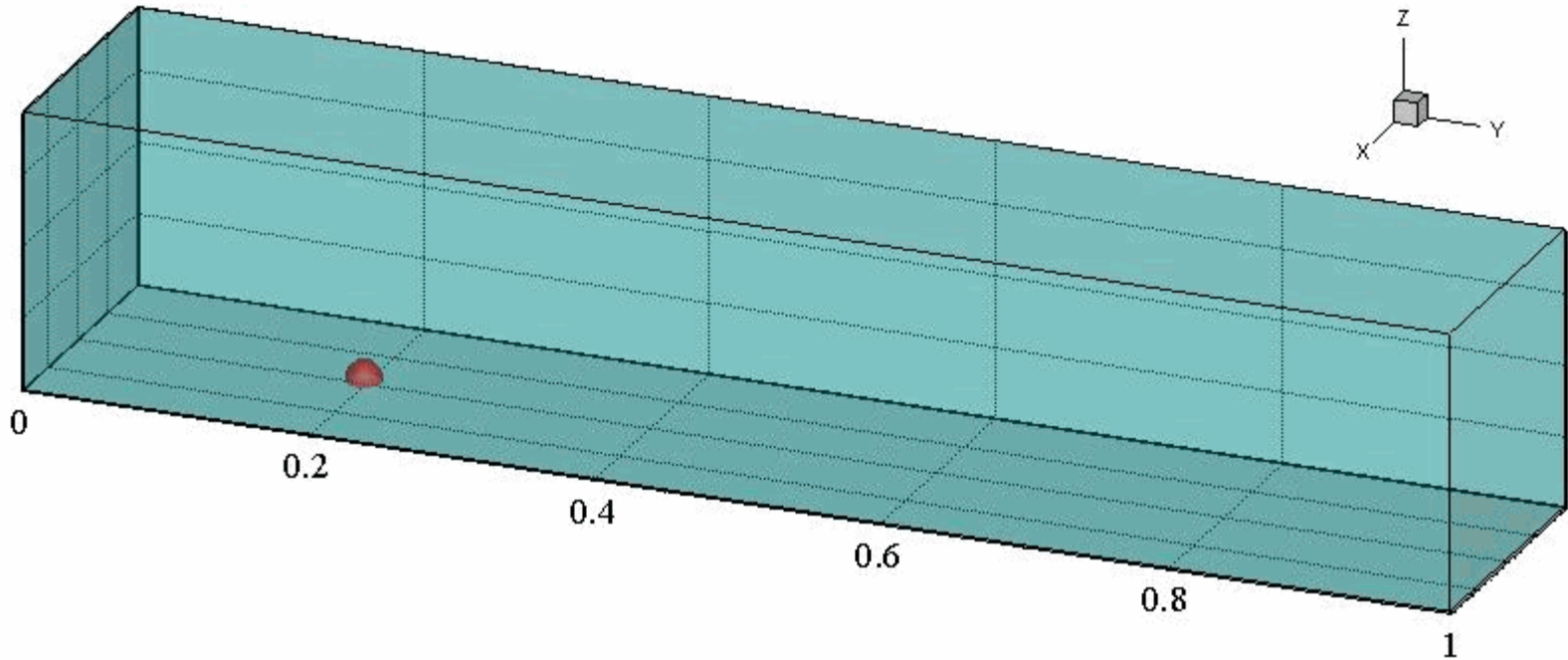
Initial condition : Steady solution of single phase flow



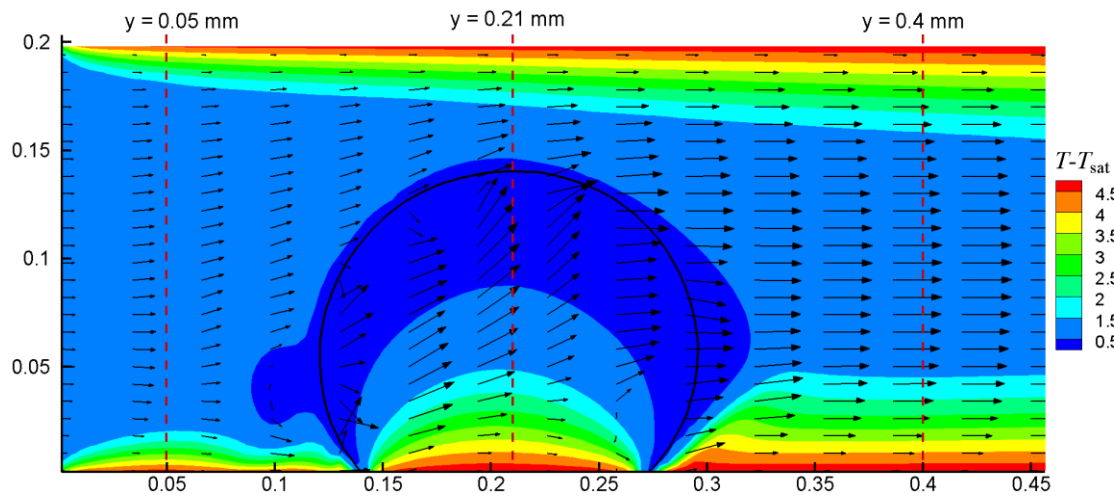
Single bubble, interface at 0.2 ms .

## 2. Numerical results of bubble evolution

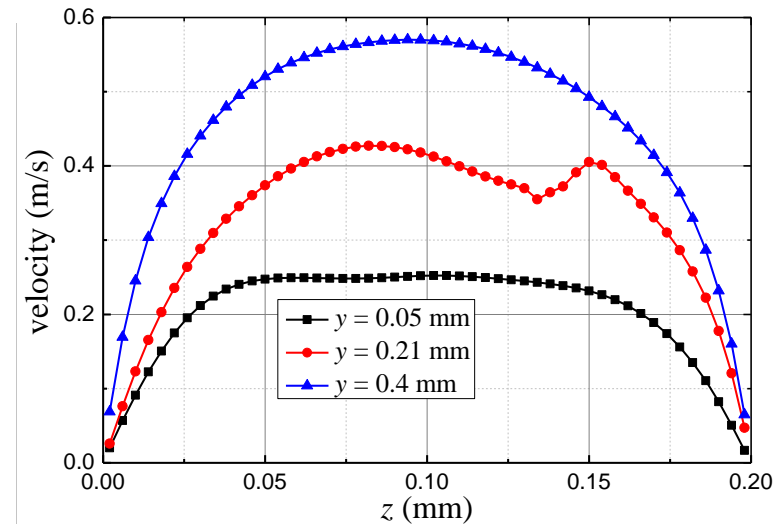
### (1) Case 1



# Effects of bubble on flow field and temperature

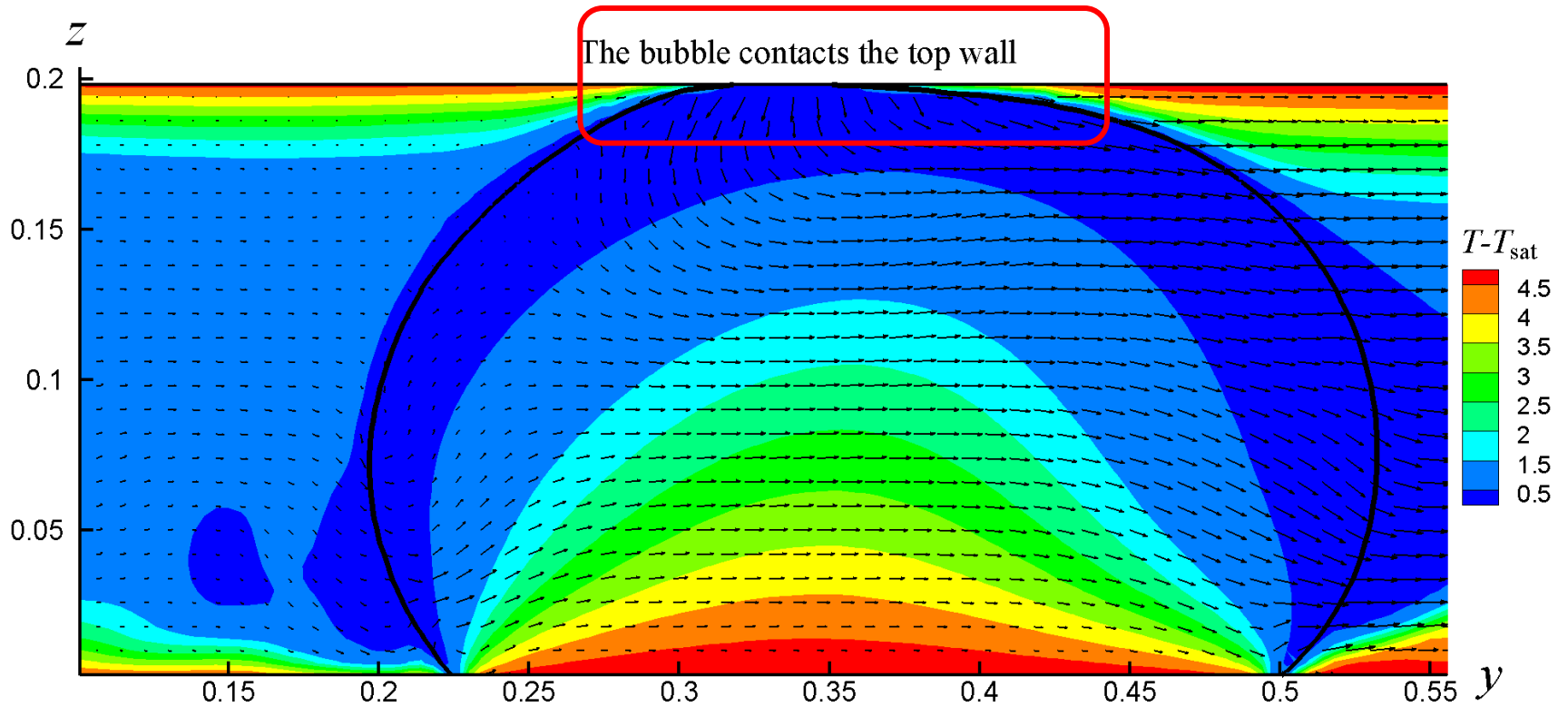


Temperature and velocity at 0.5 ms

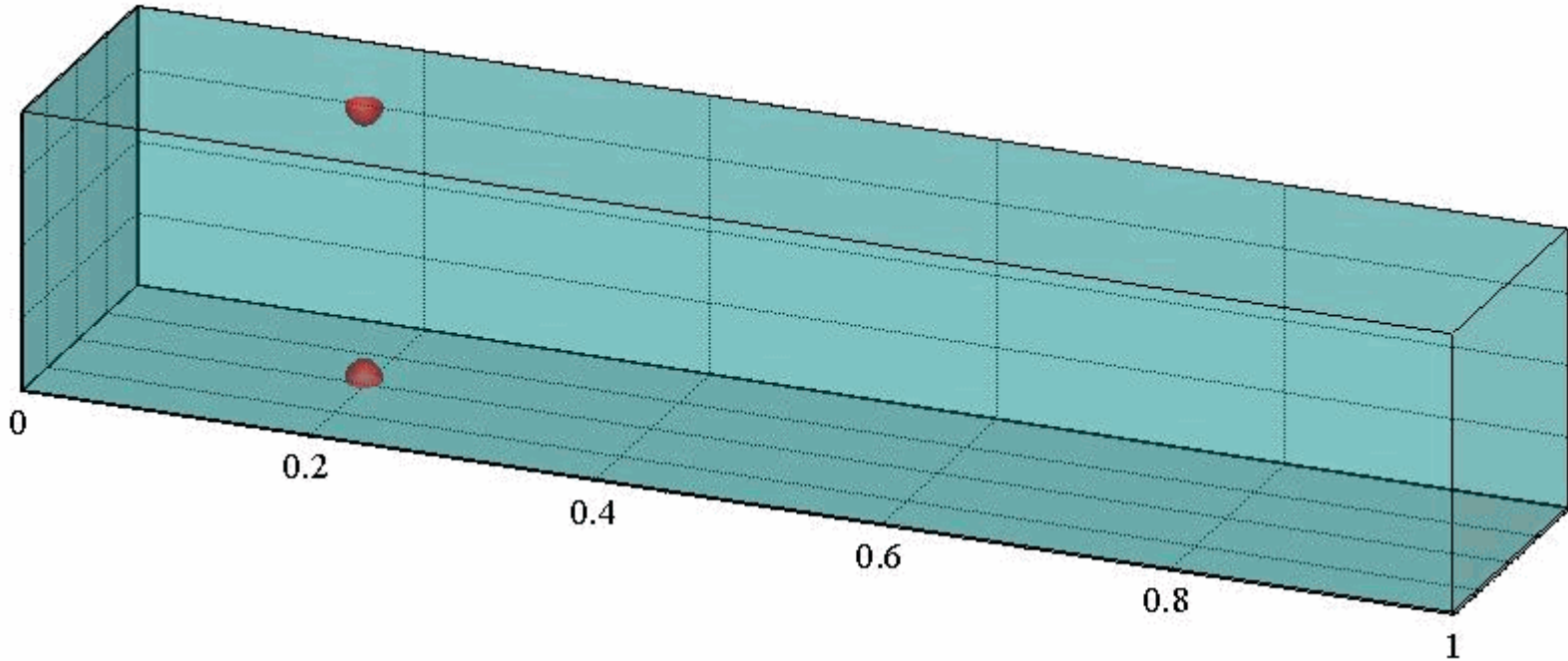


Axial velocity at three positions

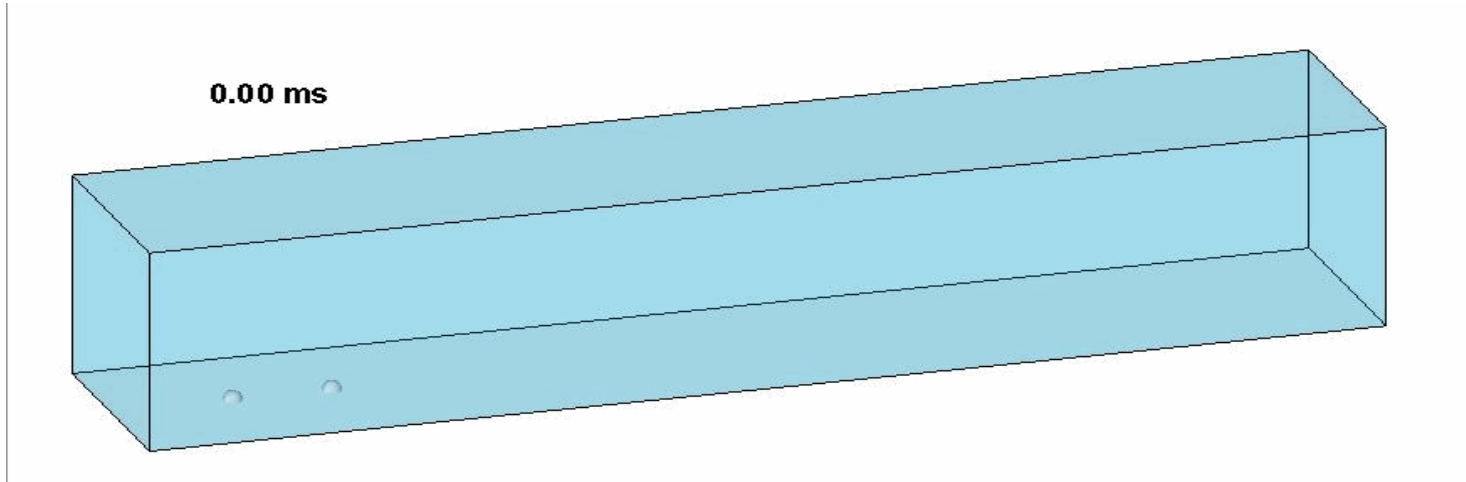
# Temperature and velocity at 0.85 ms



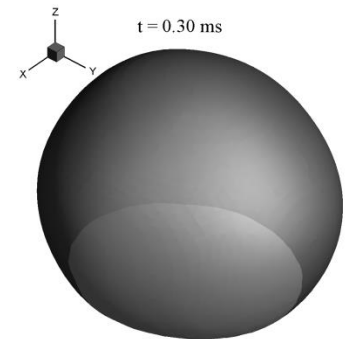
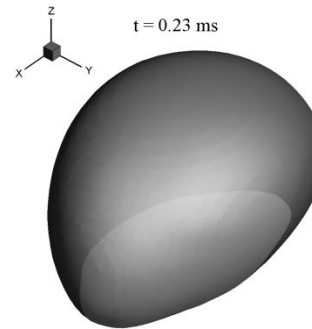
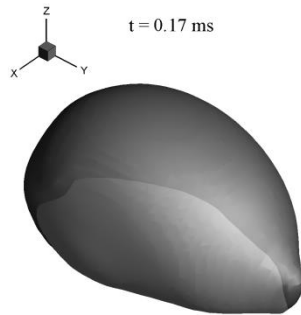
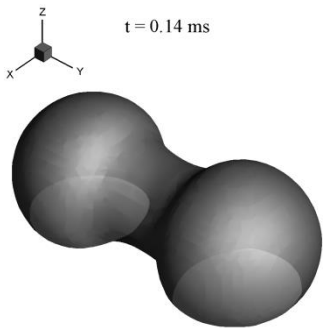
# Case 2



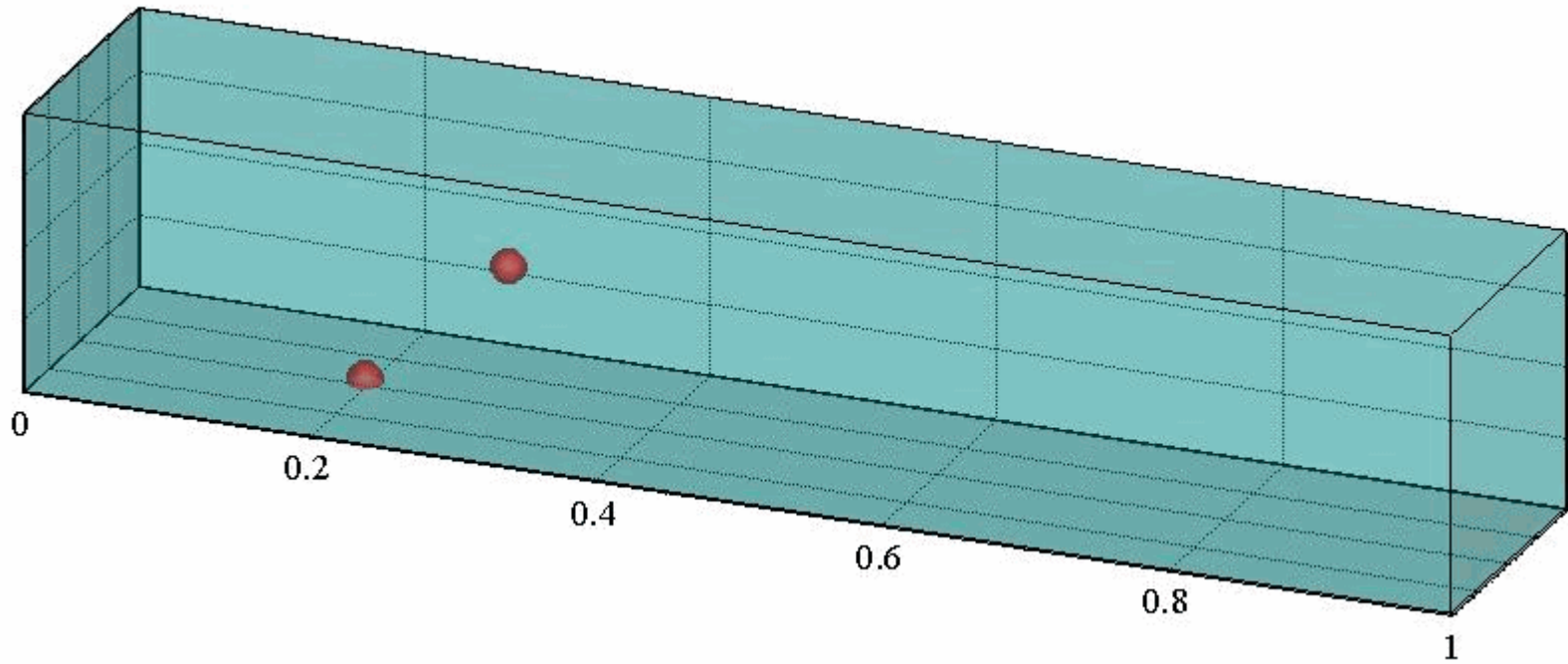
# Case 3



## Merging process of bubbles

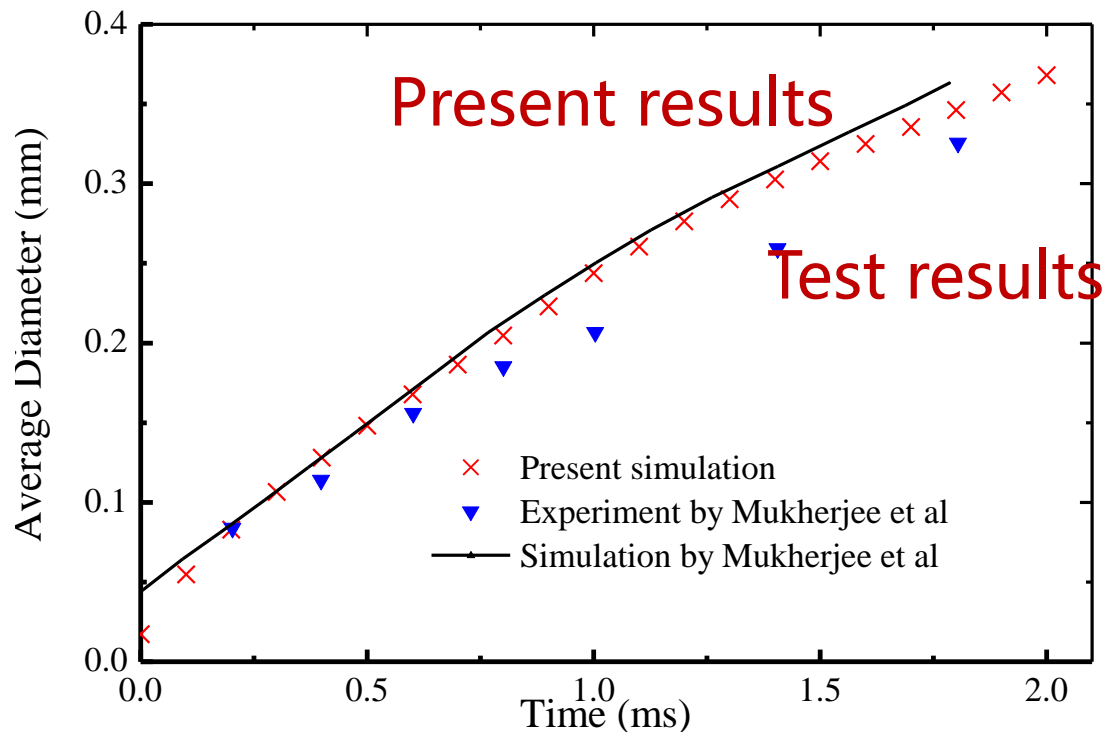


# Case 4



### 3. Comparison with test results

- (a) 2K liquid supper heat for initial and inlet fluid;
- (b) Wall supper heat : 2.1 K;
- (c) Contact angle: 30°;
- (d) Bottom wall-adiabatic; Width of channel: 229 μm



[1] D. L. Sun, W. Q. Tao, A Coupled Volume-of-Fluid and Level Set (VOSET) Method for Computing Incompressible Two-Phase Flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, vol. 53, 645-655

[2] D.Z. Guo, D.L. Sun, Z.Y. Li, W. Q. Tao, Phase Change Heat Transfer Simulation for Boiling Bubbles Arising from a Vapor Film by VOSET Method, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2011, vol. 59, 857-881

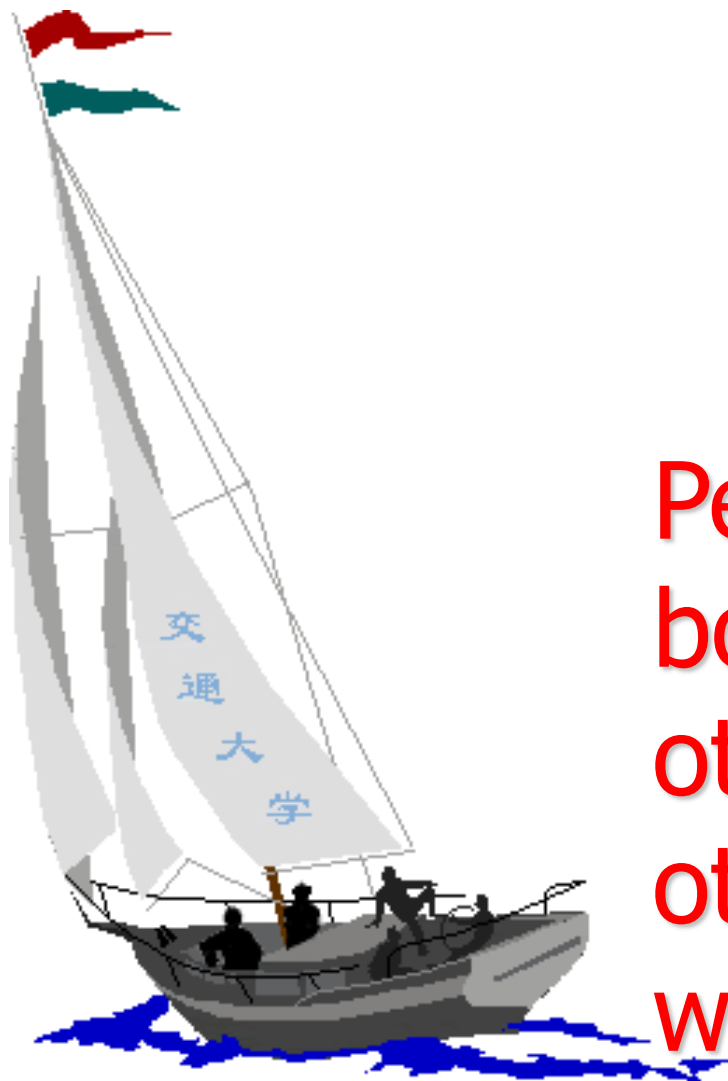
[3] K. Ling, Z.Y. Li, W.Q. Tao, A direct numerical simulation for nucleate boiling by the VOSET method, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2014, vol.65, 949-971

[4] Kong Lin, Zhao-Hui Li, Dong-Liang Sun, Ya-Ling He, Wen-Quan Tao , A three-dimensional volume of fluid & level set (VOSET) method for incompressible two-phase flow, *Computers & Fluids*, 2015,118:293-304

[5] Kong Ling, Gihun Son, Dong-Liang Sun, Wen-Quan Tao ,Three dimensional numerical simulation on bubble growth and merger in microchannel boiling flow, *Int. J Thermal Science*, 2015 98:135-147

# 致 谢

本报告中所引用的本课题组的研究成果是在  
以及国家自然科学基金（No 50276046，  
50236010，50076034）的支持下完成的。博士研究生孙东亮、郭东之和凌空对方法的发展做出了  
贡献；感谢凌空对准备本讲PPT过程中给予的帮助。



# 同舟共济 渡彼岸!

People in the same  
boat help each  
other to cross to the  
other bank,  
where....